2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

エネルギー制約を考慮した拡散デイタム探索ゲーム

1504810 防衛大学校　＊宝崎隆祐　HOHZAKI Ryusuke
Naval Postgraduate School (USA)　アラン・ウォッシュバーン　Alan WASHBURN

1．はじめに

目標物の探知を意図する海難活動，軍事行動等において，暴露された目標物の位置（デイタム点）や時刻情報をデイタム情報と言い，この情報により動機付けられた探索者による探索活動をデイタム探索と呼ぶ．第2次大戦中の米海軍のＯＲ活動の理論的成果を纏めたB.O.Koopman[1]も，ランダムな針路選択によりデイタム点から一定速度で拡散する目標物に対する探索についてすでに論じている．デイタム探索において，目標物が自らの移動戦略を決め，探索者側が探索努力資源の配分戦略をとる２人ゼロ和ゲームの研究は，問題の困難さからそれほど多くはなく，また目標物の移動の現実的連続性を無視してモデルを単純化する場合が多い[2, 3]．これらの問題における最適戦略の定性的な傾向は，目標物はその存在分布を存在領域内でできるだけ一様にすることにより敵対する探索者に位置局限されないように配慮し，探索者側はそれに対応するように一様な探索努力配分に努めるというものである．この報告では，現実的な制約として目標物側のエネルギー消費と運動の連続性を考慮したデイタム探索について述べる．

2．デイタム探索ゲームの記述と定式化

(1) 探索空間を２次元連続ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^2$ とし，時刻 $t=0$ に目標物は原点（デイタム点）に存在する．

(2) 探索者はこのデイタム情報を得て，タイムレイト τ 後から時刻 $t=T$ まで目標物の探索を実施する．探索にあたっては任意に分割可能な探索努力を次の制約下で任意の地点に投入できる．すなわち，時刻 t において単位時間あたり ρ の探索努力量が使用できる．

(3) 最初原点に位置していた目標物は時刻 $t=0$ 以降 $\boldsymbol{R}^2$ 上を連続的に直進移動するが，速度 v を使用するにあたっては，単位時間あたりエネルギー量 $\mu(v)$（$\mu(\cdot)$ は凸増加関数）を消費する．また，使用速度は最大速度 $\bar{S}$ を越えてはならず，初期時点において蓄えられているエネルギー総量は E である．

(4) ある地点に存在する目標物に対する探知確率がそこに投入される探索努力量に比例すると仮定すれば，目標の存在確率密度で重み付けられた努力量の空間・時間積分により目標探知確率の指標が得られる．ここでの問題は，この指標を支払関数とし，探索努力の配分戦略をもつ探索者をマキシマイザー，エネルギー制約下で連続移動行動をとる目標物をミニマイザーとする２人ゼロ和ゲームである．

問題は原点を中心として点対称であるから，時刻 t，原点からの距離 $x\in[0,\infty)$ における探索者の探索努力密度を $h(x,t)$ とし，移動による目標物の存在確率密度を $f(x,t)$ とすると，$\boldsymbol{H}=\{h(x,t),x\in[0,\infty),t\in[\tau,T]\}$，$\boldsymbol{F}=\{f(x,t),x\in[0,\infty),t\in[0,T]\}$ に対する支払関数は $G(\boldsymbol{H},\boldsymbol{F})=\int_\tau^T\int_{X_t}h(x,t)f(x,t)2\pi x dxdt$（$X_t$ は時刻 t における目標物の存在領域）と書ける．探索努力密度 $h(x,t)\geq 0$ の制約は $2\pi\int_0^\infty h(x,t)xdx\leq\rho$，$\tau\leq t\leq T$ であり，目標存在確率密度 $f(x,t)\geq 0$ は目標物の移動法則に依存しつつ $2\pi\int_{X_t}f(x,t)xdx=1$，$0\leq t\leq T$ を満たさなければならない．目標物の移動は，時刻 t における目標位置 $x(t)$ と速度 $v(t):=dx(t)/dt$ に関して，$v(t)\leq\bar{S}$，また $\int_0^T\mu(v(t))dt\leq E$ の制約をもつ．

3．離散モデルと最適解

ゲームの解の直感的説明のため，ここでは１次元離散モデルによる定式化と解の導出を行う．時間，地理空間をそれぞれ離散時点 $t=1,\cdots,T$，セル空間 $\boldsymbol{K}=\{1,\cdots,K\}$ とする．時点 t におけるセル i から次の時点 $t+1$ におけるセル j への移動量は速度と見なせるから，エネルギー消費 $\mu(i,j)$ を伴う．あるセル（デイタム点）に初期時点 $t=0$ で存在する目標物がエネルギー総量制約 E を満たしつつ取りうるすべてのパスは有限個あり，その集合を Ω，パス $\omega\in\Omega$ の時点 t でのセルを $\omega(t)$ とする．また時刻 t にセル $i\in\boldsymbol{K}$ を通るパス全体を $\Omega_i^t:=\{\omega\in\Omega|\omega(t)=i\}$ で表す．時点 t での使用可能量 $\Phi(t)$ をもつ探索者の探索努力配分を $\{\varphi(i,t),i\in\boldsymbol{K},\ t=\tau,\cdots,T\}$，目標物がパス ω を選択する確率を $\{\pi(\omega),\omega\in\Omega\}$ で表せば，支払関数は $G(\varphi,\pi)=\sum_\omega\pi(\omega)\sum_{t=\tau}^T\varphi(\omega(t),t)$ となり，$\max_\varphi G(\varphi,\pi)=\max_\varphi\sum_{t=\tau}^T\sum_i\left(\sum_{\omega\in\Omega_i^t}\pi(\omega)\right)\varphi(i,t)=\sum_{t=\tau}^T\Phi(t)\max_i\left(\sum_{\omega\in\Omega_i^t}\pi(\omega)\right)$ を得る．これから，目標物の最適パス選択確率は次の線形計画問題を解くことにより，また探索者の最適探索努力配分はその最適双対変数として得られる．

$$\min \sum_{t=\tau}^{T} \Phi(t)\nu(t) \quad s.t. \quad \sum_{\omega \in \Omega_i^t} \pi(\omega) \le \nu(t),\ t=\tau,\cdots,T,\ i \in \boldsymbol{K},\ \ \pi(\omega) \ge 0,\ \omega \in \Omega,\ \ \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1\ . \tag{1}$$

数値例によれば，目標物の存在可能領域内部には様々なパスが交差していることから目標物は領域内部における目標存在分布をかなり一様化でき，探索者による効率的な探索を困難にすることができる．ところが，エネルギー制約により領域の境界付近に沿ったパスの選択数は少なく，これを考慮して探索努力の一様でない配置が効果的となる．

4．連続モデルのゲーム値の下界と上界

下界　時刻 t における目標存在領域の最大半径は $\max \int_0^t v(\xi)d\xi \ \ s.t.\ 0 \le v(\xi) \le \bar{S},\ \xi \in [0,t],\ \int_0^t \mu(v(\xi))d\xi \le E$ で与えられる．これは変分法を用いることにより容易に解け，解は定速運動となる．従って，これらの最大半径内で常に一様存在分布を生起させる過大評価された目標物側の運動により，ゲーム値の下界 $\underline{G} = \int_\tau^T \frac{\rho}{\pi x(t)^2} dt$ が得られる．ただし，$\tilde{t} := E/\mu(\bar{S})$ とすれば，$x(t)$ は次式で定義される．

$$x(t) = \begin{cases} t\bar{S}, & 0 \le t \le \tilde{t}\ , \\ t\mu^{-1}(E/t), & \tilde{t} < t\ . \end{cases} \tag{2}$$

上界　上式の目標位置 $x(t)$ が常時実行可能となるパスを考えることにより，ゲーム値の上界が得られる．すなわち，$\min \int_\tau^T \frac{\rho}{\pi x(t)^2} dt$ を移動の制約条件下で最小にする目標パスに関する次の問題を考える．ただし，$I(t) = \{0,\ 0 \le t < \tau$ のとき; $1,\ \tau \le t$ のとき $\}$ である．

$$\min_{\{v(t)\}} \int_0^T I(t)/x(t)^2 dt \quad s.t. \quad \dot{x}(t) = v(t), \quad 0 \le v(t) \le \bar{S}, \quad \int_0^T \mu(v(t))dt \le E\ . \tag{3}$$

これは $v(t)$ を制御ベクトルとする制御問題であり，ハミルトニアン関数を $H(t) := I(t)/x(t)^2 + p(t)v(t) + \lambda\mu(v(t))$ で定義すれば，最適解は次式を満たす．

$$\dot{x}(t) = \partial H/\partial p = v(t), \tag{4}$$

$$\dot{p}(t) = -\partial H/\partial x = \begin{cases} 0, & t < \tau \text{ のとき}, \\ 2/x(t)^3, & \tau \le t \text{ のとき}, \end{cases} \tag{5}$$

$$v(t) = \arg\min_{v(t)} H(t) = \begin{cases} \bar{S}, & p(t) \le -\lambda\mu'(\bar{S}) \text{ のとき}, \\ (\mu')^{-1}(-p(t)/\lambda), & -\lambda\mu'(\bar{S}) < p(t) < -\lambda\mu'(0) \text{ のとき}, \\ 0, & -\lambda\mu'(0) \le p(t) \text{ のとき}. \end{cases} \tag{6}$$

最適速度 $v(t)$ は次式で得られる．ただし，パラメータの対 (b,V) は，$p(b) + \lambda\mu'(\bar{S}) = 0$ を満たす b による $(b,\bar{S})$，または $p(\tau) + \lambda\mu'(V) = 0$ を満たす V による (τ, V) のいずれかである．

$$\int_V^{v(t)} \frac{\mu''(v)}{\{H(b) + \lambda(v\mu'(v) - \mu(v))\}^{3/2}} dv = -\frac{2(t-b)}{\lambda}\ . \tag{7}$$

この最適化問題の解速度 $v(t) = \dot{x}(t)$ に対し，確率密度関数 $g(y) = 2y$ により $[0,1]$ 内で値をとる確率変数 Y を用い速度 $Yv(t)$ を選ぶ戦略により，目標物は任意の時刻 t において半径 $x(t)$ の領域内で一様存在分布を実現できる．そのときのゲームの値は (3) 式の最適値の ρ/π 倍であり，真のゲーム値の上界を与える．

5．数値例

紙数の制約上，数値例については発表会当日紹介する．上界の推定については，上述以外の方法も考えられる．

参考文献

[1] B.O. Koopman, *Search and Screening*, Pergamon, pp.221-227, 1980.

[2] J.M. Danskin, A Helicopter versus Submarine Search Game, *Operations Research* **16**, pp.509-517, 1968.

[3] A.R. Washburn, Search-Evasion Game in a Fixed Region, *Operations Research* **28**, pp.1290-1298, 1980.