2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

過去の情報及び2種類の需要形態を考慮した 有限期間 Perishable Inventory Model

02103234 神戸商科大学大学院 * 川勝 英史 KAWAKATSU Hidefumi
01105053 神戸商科大学商経学部 菊田 健作 KIKUTA Kensaku
01503164 神戸商科大学商経学部 濱田 年男 HAMADA Toshio

1. はじめに

食品や化学薬品などの商品には寿命があることが多く，このような商品を取扱ったモデルは多数報告されている [1-5]. 特に，Nahmias[1] や Fries[2] によって商品の寿命が任意である場合のモデルが提案されて以来，この種の研究が盛んに行われている．Nahmias と Fries とのモデルにおける主な違いは，寿命を迎えた商品の廃棄量の計算方法にある．廃棄量として，Nahmias は現在発注した商品が将来廃棄される量に注目しているのに対し，Fries は現在の期に廃棄される商品の量に注目している．Namias のモデルは，期待廃棄量の計算が発注した時点にできることから，多くの1計画期間モデルにおいて引用されている [3]. 一方，Nandakumar[4] は計画期間が無限大の場合に，Fries のモデルにおける最適発注量に対する近似解法を提案している．本研究でも Fries のモデルを拡張するが，有限の計画期間を考える．

ところで，商品の需要が，気候や為替レート，野球の勝敗などその日の状態に影響されるような場合がある．ここでは,「良く売れる」場合と「余り売れない」場合の2種類の需要形態を考慮したモデルを提案する．なお，それぞれの状態が起こった回数を情報として持ち，現在の状態はこの情報に依存して起こるものとする．

2. モデル

本研究では以下を仮定する．(1) 計画期間は既知で有限である．(2) 新品の商品が到着し，商品の寿命は m 期間である．(3) 2種類の状態 H, C が存在し，それぞれの発生回数を s, t $(s,t \geq 1)$ とする．また，どちらの状態が起こるかは，パラメータ s, t のベータ分布に従う．(4) 現在の状態が H のとき D^I 単位の需要が発生し，状態が C のとき需要は D^{II} 単位起こる．但し，D^I と D^{II} は，それぞれ既知の密度関数 $f^I(\cdot)$, $f^{II}(\cdot)$ 及び，分布関数 $F^I(\cdot)$, $F^{II}(\cdot)$ をもつ互いに独立な確率変数である．また，$E\left[D^{II}\right] < E\left[D^I\right]$ を仮定する．(5) リードタイムは0であり，入庫速度は無限大である．(6) 品切れ，或いは緊急調達を認めるがバックログは考慮しない．(7) 商品1単位を価格 p で販売する．(8) 次のような費用を考慮する．

- c : 商品1単位当り購入費用.
- h : 商品1単位を1期間維持する費用.
- K : 1回当り発注費用.
- r : 商品1単位当り品切れ費用 $(r > c)$.
- θ : 商品1単位当り廃棄費用.

3. 期待利益

残り n 期間の期待利益を導出する．1期間の需要量を u, 発注量を y, 残り寿命が i 期間である商品数を x_i $(i = 1, \cdots, m-1)$ とし，$\boldsymbol{x} = (x_{m-1}, x_{m-2}, \cdots, x_1)$ とする．このとき発注費用を除く1期間の期待利益は

$$
\begin{aligned}
B(\boldsymbol{x}, y; s, t) \;=\; & -cy + \tfrac{s}{s+t}\Big[p\int_0^\infty u f^I(u)du \\
& -h\int_0^{\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1}+y}(\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1}+y-u)f^I(u)du \\
& -r\int_{\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1}+y}^\infty(u-\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1}-y)f^I(u)du \\
& -\theta\int_0^{x_1}(x_1-u)f^I(u)du\Big] \\
& +\tfrac{t}{s+t}\Big[p\int_0^\infty u f^{II}(u)du \\
& -h\int_0^{\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1}+y}(\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1}+y-u)f^{II}(u)du \\
& -r\int_{\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1}+y}^\infty(u-\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1}-y)f^{II}(u)du \\
& -\theta\int_0^{x_1}(x_1-u)f^{II}(u)du\Big] \qquad (1)
\end{aligned}
$$

で与えられる．但し，$\mathbf{1} \equiv (1, 1, \cdots, 1)$ とし，$\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1}$ は $\boldsymbol{x}$ と $\mathbf{1}$ との内積とする．

繰越在庫量のうち，残り寿命が i である商品の量は以下のように定義できる．

$$
z_i(\boldsymbol{x}, y, u) = \begin{cases} \max[0, \min(x_{i+1}, \sum_{j=1}^{i+1} x_j - u)], & \text{if } i = 1, 2, \cdots, m-2 \\ \max[0, \min(y, \sum_{j=1}^{m-1} x_j + y - u)], & \text{if } i = m-1 \end{cases} \qquad (2)
$$

この vector-valued 関数を $z(x,y,u)$ とすると，s と t の情報が与えられたときの残り n 期間の期待利益 $A_n(x;s,t)$ は次式によって得られる．

$$\begin{aligned}
&A_n(\boldsymbol{x};s,t)\\
&= \sup_{y\geq 0}\Big\{-K\delta(y)+B(\boldsymbol{x},y;s,t)\\
&\quad +\tfrac{s}{s+t}\int_0^\infty A_{n-1}\left(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},y,u);s+1,t\right)f^I(u)du\\
&\quad +\tfrac{t}{s+t}\int_0^\infty A_{n-1}\left(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},y,u);s,t+1\right)f^{II}(u)du\Big\}
\end{aligned} \tag{3}$$

ここに

$$\delta(y)=\begin{cases}1, & \text{if } y>0\\ 0, & \text{otherwize}\end{cases} \tag{4}$$

である．

また，残り 1 期間の期待費用は

$$A_1(\boldsymbol{x};s,t) = \sup_{y\geq 0}\{-K\delta(y)+B(\boldsymbol{x},y;s,t)\} \tag{5}$$

で与えられる．

補題 1　$B(\boldsymbol{x},y;s,t)$ は y に関して凹関数であり，$B(\boldsymbol{x},y;s,t)$ を最大にするような y^* が唯一存在する．なお，これを $y^*=S(\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1})$ とおく．

補題 *1* で求めた $S(\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1})$ は，発注費用を除いた *1* 期間の期待利益である．発注費用を考慮した場合に，残り *1* 期間の期待利益を最大にするような最適発注量は次の定理により求められる．

定理 *1*　式 (*5*) の $-K\delta(y)+B(\boldsymbol{x},y;s,t)$ を最大にする発注量 $y^*(\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1})$ が唯一存在し，この $y^*(\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1})$ は次のように求めることができる．

(*1*) $K+B\left(\boldsymbol{x},S(\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1});s,t\right)>B(\boldsymbol{x},0;s,t)$ の場合．
このとき，$y^*(\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1})=S(\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1})$ である．

(*2*) $K+B\left(\boldsymbol{x},S(\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1});s,t\right)\leq B(\boldsymbol{x},0;s,t)$ の場合．
このとき，$y^*(\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1})=0$ である．

本研究で扱っているようなモデルでは，残り n 期間の期待利益を最大にするような発注政策を示すことには相当な困難が伴うことが知られている [5]．ここでは，残り n 期間の期待利益を最大にするような y^* が存在すると仮定し，D^I と D^{II} が，それぞれ率 λ_1，λ_2 ($\lambda_1<\lambda_2$) をもつ指数分布に従う確率変数である場合について，目的関数の性質を示すこととする．

このとき

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{x},y,\lambda) \equiv\ & p\int_0^\infty u\lambda e^{-\lambda u}du\\
&-h\int_0^{\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1}+y}(\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1}+y-u)\lambda e^{-\lambda u}du\\
&-r\int_{\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1}+y}^\infty(u-\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1}-y)\lambda e^{-\lambda u}du\\
&-\theta\int_0^{x_1}(x_1-u)\lambda e^{-\lambda u}du
\end{aligned} \tag{6}$$

と置くと以下のことが言える．

補題 2　需要の分布が指数分布に従うとき，すべての $x_i\geq 0$ ($i=1,2,\cdots,m-1$) と $y\geq 0$ とに対して

$$L(\boldsymbol{x},y,\lambda_2)\leq L(\boldsymbol{x},y,\lambda_1) \tag{7}$$

が成立する．

また，補題 *2* の結果を用いることで次のことが証明できる．

定理 *2*　需要の分布が指数分布に従い，式 (*8*) の条件を満たすとき，すべての自然数 k について $A_k(\boldsymbol{x};s,t+1)\leq A_k(\boldsymbol{x};s,t)\leq A_k(\boldsymbol{x};s+1,t)$ が成立する．

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty A_1(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},y,u);s,t)\lambda_2 e^{-\lambda_2 u}du\\
&\leq \int_0^\infty A_1(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},y,u);s,t)\lambda_1 e^{-\lambda_1 u}du
\end{aligned} \tag{8}$$

なお，紙数の都合上，数値例は当日発表させて頂く．

参考文献

[1] S.Nahmias, Optimal ordering policies for perishable inventory-II, *Operations Research*, **23** , (1975), 735-749.

[2] B.E.Fries, Optimal ordering policy for a perishable commodity with fixed lifetime, *Operations Research*, **23**, (1975), 46-61.

[3] H.Ishii,T.Nose, Perishable inventory control with two types of customers and different selling prices under the warehouse capacity constraint, *Int. J. Production Economics*, **44**, (1996), 167-176.

[4] P.Nandakumar,T.E.Morton, Near myopic heuristics for the fixed-life perishability problem, *Management Science*, **39**, (1993), 1490-1498.

[5] S.Nahmias, The fixed-charge perishable inventory problem, *Operations Research*, **26** , (1978), 464-481.