

故障を伴うマシンと中間バッファを有する生産ラインの近似解析法

千葉工業大学大学院
 01201380 千葉工業大学

*仇 莉 QIU Li
 鈴木 誠道 SUZUKI Shigemichi

1.はじめに

先に[4]図1に示すような故障を伴うマシンと中間バッファを有する生産ラインの確率モデルに対する厳密解法を提案してが、マシンの個数やバッファ容量の増大に伴って解くべきシステムは巨大となる。それに対応するため本稿では2stage、3stageの近似解法を提案し、数値実験によってその有効性を確かめる。

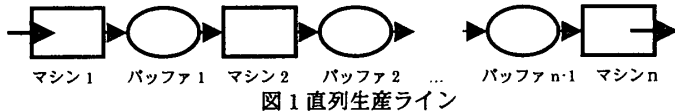


図1 直列生産ライン

2.モデル

- (1) バッファ i の容量はそれぞれ $M_i < \infty$ ($i=1,2,\dots,n-1$)とする。
- (2) バッファ i の空き数 m_i がマシン $i+1$ 中の容量1を含んで m_i であり, $0 \leq m_i \leq M_i+1$ ($i=1,2,\dots,n-1$); マシン i の加工時間 X_i ($i=1,2,\dots,n$) はそれぞれパラメーター, $f_i(m_i)\mu_i$, $f_j(m_{j-1}, m_j)\mu_j$ ($j=2,\dots,n-1$), $f_n(m_{n-1})\mu_n$ の指数分布とする。これによって、バッファの空き数によって、各マシンの生産能力を調整することができる。
- (3) マシン i の故障までの時間 Y_i の分布をそれぞれパラメーター α_i の指数分布とする。マシン i の修理時間 Z_i の分布をそれぞれパラメーター β_i の指数分布とする ($i=1,2,\dots,n$)。各機械は加工しない時は故障しないものとする。
- (4) 以上の加工時間, 修理時間, 故障までの時間は互いに独立とする。
- (5) 下流バッファに空きがないときはマシン i は加工を開始しない。このとき、マシン i はブロッキング状態にあるという。
- (6) マシン1へは倉庫入力, マシン n からは製品庫出力を仮定する。

3. 生産ラインの分解

3.1 2ステージ生産ラインの解析

一般的にモデル化した2ステージ生産ラインに対して、任意の時刻 t でのバッファの空き数 $m_i(t)$ と二つのマシンの状態 $(s_1(t), s_2(t))$ を用いると、全システムの状態は $S(t) = (m_i(t); s_1(t), s_2(t))$ で表される。 $S(t)$ は既約マルコフ過程となる。これらの状態相互間の遷移速度行列 Q は状態 $(m_i; s_1, s_2)$ に関して辞書式に並べて行列表現すると以下のようになる。

$$Q = \begin{bmatrix} A_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_{0,1} & A_{1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_{1,0} & A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{M_1, M_1} & A_{M_1, M_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{M_1, M_1} & A_{M_1, M_1} & A_{M_1, M_1+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{M_1, M_1} & A_{M_1, M_1+1} \end{bmatrix} \quad A_{0,0} = \begin{bmatrix} -(\alpha_1 + \beta_1) & \beta_1 & \alpha_1 \\ 0 & -\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_1 \end{bmatrix}$$

$$A_{i,i-1} = \begin{bmatrix} -(\alpha_i + \beta_i) & \beta_i & \alpha_i \\ \beta_i & -\beta_i & 0 \\ \beta_i & 0 & -\beta_i \end{bmatrix} \quad 1 \leq m_i \leq M_i$$

$$A_{M_i, M_i-1} = \begin{bmatrix} -(\alpha_i + \beta_i) & \beta_i & \alpha_i \\ \beta_i & -\beta_i & 0 \\ \beta_i & 0 & -\beta_i \end{bmatrix} \quad 1 \leq m_i \leq M_i - 1$$

$$A_{M_i, M_i+1} = \begin{bmatrix} -\alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_i \end{bmatrix} \quad 2 \leq m_i \leq M_i$$

$$A_{M_i, M_i} = \begin{bmatrix} -(\alpha_i + \beta_i) & \beta_i & \alpha_i \\ 0 & -\beta_i & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_i \end{bmatrix}$$

$A_{0,0}, A_{m_i, m_i}$ ($1 \leq m_i \leq M_i$), A_{M_i+1, M_i+1} に対応する π の部分をそれぞれ π_0 , π_{m_i} ($1 \leq m_i \leq M_i$), π_{M_i+1} とする。厳密解法を用いて、 π が求められる。そして、マシン1のブロッキング状態の確率 $\text{blo}1$ とマシン2のスターピング状態の確率 $\text{stv}2$ が求められる。ここに、 $\text{blo}1 = \pi_0 e$, $\text{stv}2 = \pi_{M_1+1} e$, $e = (1, 1)^T$ 。

3.2 生産ラインの2stage分解

生産ラインは二つずつのマシンと一つのバッファに分解される。分解した2ステージ生産ラインに対して、3.1の2ステージ生産ラインの解析法を用いて、 n ステージ生産ラインの平衡状態確率 π の近似解を求めることができる。

まず、マシン1, バッファ1, マシン2を2ステージ生産ラインと見なす。その遷移速度行列と平衡状態確率をそれぞれ $Q_1, \pi^{(1)}$ で表す。 Q_1 の表現は上述の Q の表現と同じである。3.1の解析法を用いて、 $\pi^{(1)}$ を求める。 $\pi^{(1)}$ によって、マシン2のスターピング状態の確率は $\text{stv}2 = \pi^{(1)}_{M_1+1} e$ で計算される。

次にマシン2, バッファ2, マシン3を2ステージ生産ラインと見なす。この2ステージ生産ラインに対して、マシン2にはスターピング状態があるので、マシン2の故障発生率 α_2 と加工率 μ_2 が変わり、それぞれ $\alpha_2^{(1)} = (1 - \text{stv}2)\alpha_2$, $\mu_2^{(1)} = (1 - \text{stv}2)\mu_2$ で計算される。上述の Q の表現において、 α_1 と μ_1 にそれぞれ $\alpha_2^{(1)}$ と $\mu_2^{(1)}$ を代入し、 α_2 と μ_2 にそれぞれ α_3 と μ_3 を代入する。そして、平衡状態確率 $\pi^{(2)}$ が求められる。 $\pi^{(2)}$ によって、マシン3のスターピング状態の確率は $\text{blo}3 = \pi^{(2)}_{M_1+1} e$ で計算される。

同様な手順で、所望の $\pi^{(3)}, \pi^{(4)}, \dots, \pi^{(n-1)}$ は計算できる。 Q の表現において、 α_1 と μ_1 にそれぞれ $\alpha_{i+1}^{(i)}$ と $\mu_{i+1}^{(i)}$ を代入し、 α_2 と μ_2 にそれぞれ α_i と μ_i を代入し、平衡状態確率 $\pi^{(i-1)}$ が求められる。 $\pi^{(i-1)}$ によって、マシン i のスターピング状態の確率は $\text{stv}i = \pi^{(i-1)}_{M_i+1} e$ で計算される。 ($i=3, 4, \dots, n-1$)。

3.3 修正計算

上述の解析では、生産ラインの i 番目の分解に対して、マシン $i+1$ のブロッキング状態になる可能性を考慮していない。実際はマシン $i+1$ のブロッキング状態になる確率は近似的に $i+1$ 番目の解析で計算される。 ($i=1, 2, \dots, n-2$)。

マシン i の下流部分のブロッキング状態の確率 $\text{blo}i$ を用いて、 $\pi^{(i)}$ は $i=n-2, n-3, \dots, 3, 2, 1$ の順に修正計算できる。 $\pi^{(n-1)}$ は修正計算する必要はない。修正した確率を $\pi^{(i)}$ とすると、 $\text{blo}(i+1) = \pi^{(i)}_{0^{(i+1)}} e$ 。上述の Q の表現において、 α_1 と μ_1 にそれぞれ $\alpha_{i+1}^{(i)}$ と $\mu_{i+1}^{(i)}$ を代入し、 α_2 と μ_2 にそれぞれ $(1 - \text{blo}(i+1))\alpha_{i+1}$ と $(1 - \text{blo}(i+1))\mu_{i+1}$ を代入して解くと、 $\pi^{(i)}$ が得られる ($i=n-2, n-3, \dots, 2$)。

このような往復で獲得した平衡状態確率を一回目の近似解と称する。同様にして、二回目の近似解を得ることができる。二回目の近似解析では、一回目に獲得した下流部分のブロッキング状態の確率 $\text{blo}i$ ($i=2, 3, \dots, n-1$) を用いて、マシン i ($i=2, 3, \dots, n-1$) の二回目のスターピング状態確率 $\text{stv}i$ が求められる。二回目の平衡状態確率を $\pi^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) とする。マシン1にはスターピング状態がないので、 Q の表現において、 α_2 と μ_2 にそれぞれ $(1 - \text{blo}2)\alpha_2$ と $(1 - \text{blo}2)\mu_2$ を代入して解くと、 $\pi^{(1)}$ が得られる。マシン2の二回目のスターピング状態確率は $\text{stv}2 = \pi^{(1)}_{M_1+1} e$ で計算される。 $i=2, 3, \dots, n-2$ の時、 Q の表現において、 α_1 と μ_1 にそれぞれ $(1 - \text{stv}i)\alpha_i$ と $(1 - \text{stv}i)\mu_i$ を代入し、 α_2 と μ_2 にそれぞれ $(1 - \text{blo}(i+1))\alpha_{i+1}$ と $(1 - \text{blo}(i+1))\mu_{i+1}$ を代入して解くと、 $\pi^{(i)}$ が求められる。マシン n にはブロッキング状態がないので、 $i=n-1$ のとき、 Q の表現において、 α_1 と μ_1 にそれぞれ $(1 - \text{stv}(n-1))\alpha_{n-1}$ と $(1 - \text{stv}(n-1))\mu_{n-1}$ を代入し、 α_2 と μ_2 にそれぞれ α_n と μ_n を代入して解くと、 $\pi^{(n-1)}$ が求められる。マシン i のスターピング状態確率は

近似的に $stvi = \pi^{(i-1)} M_{i+1} e$ で計算される。(i=2, ..., n-1)。二回目の i 番目の分解で獲得したマシン i のブロック状態の確率 blo_i を用いて、二回目の $\pi^{(i)}$ は $i=n-2, n-3, \dots, 3, 2, 1$ の順に修正計算できる。 $\pi^{(n-1)}$ は修正計算する必要はない。同様に、三回目、四回目、... の近似を繰り返す。前回と今回の状態確率の差が所定値以下になったとき、繰り返しを停止し、そのときの状態確率とそれから得られるシステム特性値を近似値として受け入れる。

3.4 生産ラインの 3stage 分解

近似の精度を高めるために生産ラインを三つのマシンと二つのバッファに分解する。2stage 生産ラインの分解法と同様な求解方法を用いて、生産ラインの近似解を求めることができる。

4. マシン・システムに対する数値実験

マシン 1 のブロック確率が幅広い値になるようなテスト問題を生成するため $\alpha_2=0.4, \alpha_3=0.2, \alpha_4=0.1, \beta_i=\mu_i (i=1,2,3,4)$ とし、 $\alpha_1=0.4(0.4)4.0$ と変化させる。このとき、マシン 1 のブロック確率は図 2 のようになる。図 3~図 6 にバッファ容量を 1, 2, 3, 4 にしたときの最大状態確率の相対誤差を示す。この相対誤差は近似解法の誤差を表すと見ることができる。また表 1 に近似解法の性能を要約する。これにより、近似解法はかなり有効であることが確認された。

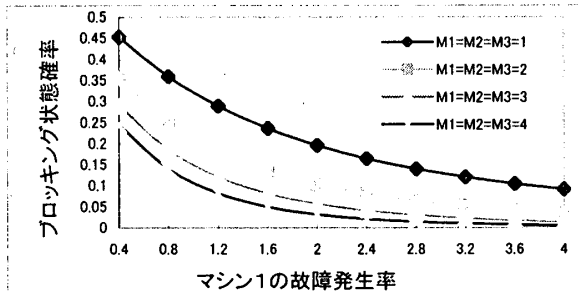


図 2 マシン 1 のブロック状態確率

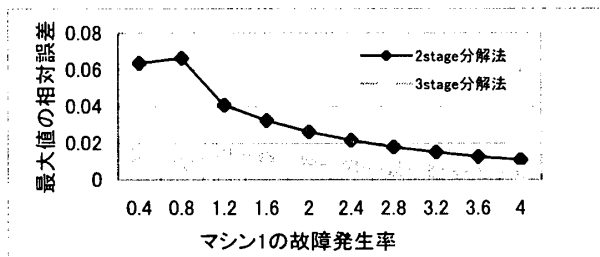


図 3 バッファ容量を 1 としたときの最大状態確率の相対誤差

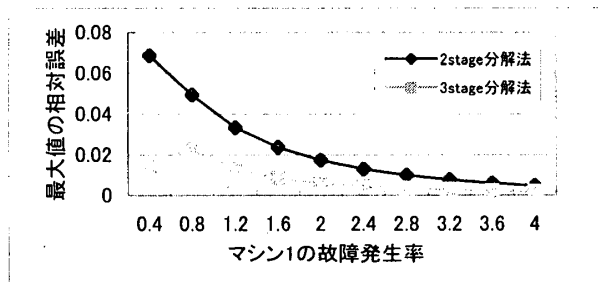


図 4 バッファ容量を 2 としたときの最大状態確率の相対誤差

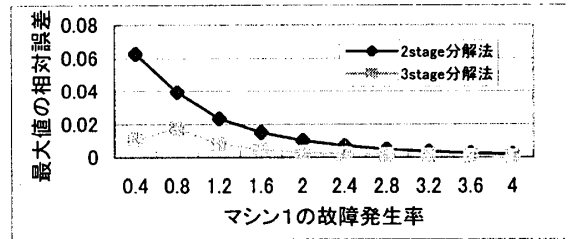


図 5 バッファ容量を 3 としたときの最大状態確率の相対誤差

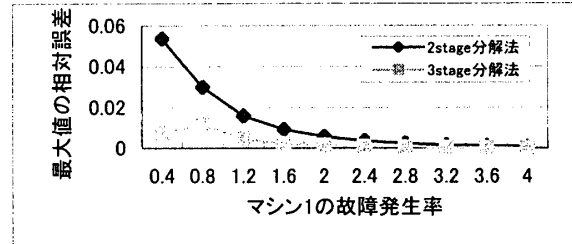


図 6 バッファ容量を 4 としたときの最大状態確率の相対誤差

Buffer の容量	Q のサ イズ	方程式の次数数		繰り返しの回数		実行時間(秒)		
		2stage	3stage	2stage	3stage	厳法	2stage	3stage
				α				
				0.4	4	0.4	4	
1	144	8	34	6	4	4	3	0.332 0.000 0.001
2	456	12	74	6	4	4	3	3.044 0.000 0.412
3	1056	16	130	5	3	3	3	33.66 0.000 0.966
4	2040	20	202	5	3	3	3	238.8 0.000 1.572

表 1 近似解法のサマリー

5. 今後の課題

- (1) 2stage, 3stage の遷移速度行列の細部構造まで利用する方法は近似解法に応用する算法の開発。
- (2) 本稿の方法の実際問題への応用。

参考文献

- [1] Neuts, M. F., "Matrix Geometric Solutions in Stochastic Models—An Algorithmic Approach", The Johns Hopkins University Press, 1981.
- [2] 仇 莉, 鈴木 誠道., "バッファの空き数によって加工時間を変化させる 3stage 生産ラインのモデル分析". 日本オペレーション・リサーチ学会秋季研究発表会 1999.
- [3] Shigemichi SUZUKI & Li QIU., "A Method for a Serial Production Line with Finite Buffer & Machine Failures", INFORMS Philadelphia, 1999.
- [4] 仇 莉, 鈴木 誠道., "故障を伴うマシンと中間バッファを有する生産ラインの一解析法". 日本オペレーション・リサーチ学会春季研究発表会 2000.
- [5] Shigemichi SUZUKI & Li QIU., "Exact and Approximate Solution Methods For a Production Line with Machine Failures and Intermediate Buffers" EURO XVII, Budapest, Hungary, 2000.
- [6] 山下 英明, 鈴木 誠道., "n ステージ直列自動生産ラインの最適バッファ配分の近似解法". 日本機械学会論文集 (C 編) 59 巻 487 号 (1987 年 3 月) 807-814.