2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

全域木検出問題の解法

02302540　防衛大学校情報工学科　*高橋 元法　TAKAHASHI Motonori
01700900　防衛大学校情報工学科　山田 武夫　YAMADA Takeo

1　はじめに

節点集合 V と枝集合 E からなる連結な無向グラフ $G=(V,E)$ と，その上の枝荷重 $c:E\to Z^+$ が与えられた場合に，荷重が丁度ある与えられた値 α である全域木が存在するかどうかを判定し，存在する場合にはそのような全域木の一つを見いだす問題を，**全域木検出問題**と呼ぶ．

本稿では，この問題が $\mathcal{NP}$-困難であることを示すとともに，その解法を示す．

2　$\mathcal{NP}$-困難性

定理：全域木検出問題は $\mathcal{NP}$-困難である．
証明：

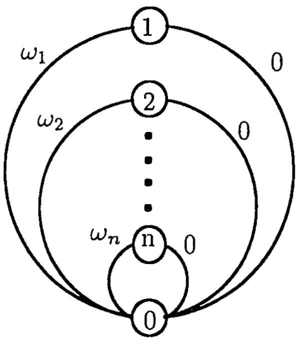

図 1: $\mathcal{NP}$-困難性の証明

任意の整数の集合 $S=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ と整数 α に対し，$\sum_{j\in S'}\omega_j=\alpha$ となるような S の部分集合 S' が存在するかという問題 (SUBSET-SUM) は，$\mathcal{NP}$-完全であることが知られている [1]．この問題は，図 1 のグラフ上の（荷重 α の）全域木検出問題に一致するので，定理は証明された．

3　近似解法

以下では全域木 T の荷重を $c(T)$ と記す．この節では，問題を少し緩和して $|c(T)-\alpha|$ が出来るだけ小さい全域木 T を求める問題を考える．これを**近似問題**という．近似問題を**局所探索法**によって解くには，**初期解**と**近傍**の概念が必要であるが，これは次のように設定する．

まず，最小全域木を求める Kruskal[2] 等のアルゴリズムを（必要ならば適当に修正して）適用することにより，初期解となる全域木が得られる．次に，全域木 T に対して，全域木 T' が T 上の枝と T 外の枝の一組の入れかえによって得られるとき，$T'\sim T$ と記し，そのような全域木全体の集合を $N(T)=\{T'|T'\sim T\}$ と書いて T の近傍と呼ぶ．

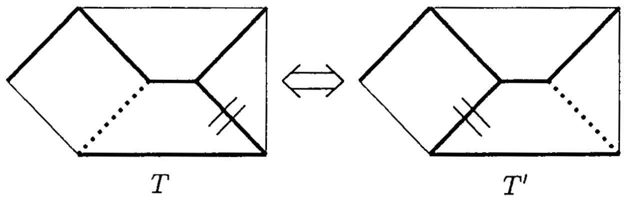

図 2: T 及び T'

以上によって局所探索法が構成されるが，そのうち，$N(T)$ 中に，T よりも良い全域木 T' が見つかり次第，T' へ移る方法を**近似解法 1** といい，$N(T)$ 中で，最良のものを探してからその全域木に移る方法を**近似解法 2** という．

4　厳密解法

近似解法によって得られた全域木 T が $c(T)=\alpha$ を満たす場合，全域木検出問題は YES として T を出力する．また，G における最小（大）全域木の荷重を $\underline{z}(G)$（$\overline{z}(G)$）と記すとき，

$$\underline{z}(G)>\alpha \quad \text{または} \quad \overline{z}(G)<\alpha$$

であれば，全域木検出問題の解答は NO となる．

これ以外の場合は，T を用いて問題を子問題に分割し，**分割統治法**を適用することで厳密に解くことが出来る．このことについては前回に述べた [3]．

分割統治アルゴリズム中の，近似解を求める部分に近似解法 1（近似解法 2）を用いる解法を**厳密解法 1**（**厳密解法 2**）と呼ぶ．

5 数値実験

5.1 実験計画

節点数 n と枝数 m の平面グラフ $P_{n,m}$ と，節点数 n の完全グラフ K_n について実験した．また，枝荷重は [1,1000] の一様乱数により定めた．

5.2 近似解法

表 1 に近似解法の結果を示す．各例題につき，上段は近似解法 1，下段は近似解法 2 を表す．各行は，$[\underline{z}(G), \overline{z}(G)]$ 間において，$P_{200,560}$ 及び K_{100} は 10 毎，$P_{400,1120}$，$P_{600,1680}$ 及び K_{140} は 100 毎，$P_{800,2240}$，$P_{1000,2800}$ 及び K_{180} は 1000 毎の α についての平均を示す．的中率は，荷重 α の全域木が得られた割合 (%) である．また，表に示したケースでは，実験した全ての α に対し全域木が存在することが，厳密解法の結果から明らかとなっている．

表より，近似解法 1 と 2 を比較すると，グラフの種類や大きさに関係なく，ステップ数，ギャップ及び的中率については近似解法 2 が，CPU 時間については近似解法 1 が優れていることが分かった．

表 1: 近似解法の結果

例題	ステップ数	ギャップ	的中率	CPU 時間
$P_{200,560}$	58.10	0.296	93.17	0.075
	32.60	0.024	97.69	0.171
$P_{400,1120}$	110.31	0.185	95.30	0.180
	64.72	0.004	99.56	0.822
$P_{600,1680}$	165.53	0.101	98.18	0.364
	98.79	0.001	99.94	2.348
$P_{800,2240}$	219.33	0.058	96.57	0.609
	132.05	0.000	100.00	5.138
$P_{1000,2800}$	273.70	0.014	98.79	0.920
	162.76	0.002	99.83	9.389
K_{60}	33.74	0.044	96.20	0.021
	14.80	0.000	99.96	0.142
K_{100}	54.35	0.002	99.90	0.042
	24.79	0.000	100.00	0.877
K_{140}	75.08	0.001	99.93	0.073
	34.84	0.000	100.00	2.876
K_{180}	94.88	0.000	100.00	0.126
	44.81	0.000	100.00	7.340

5.3 厳密解法

表 2 に厳密解法の結果を示す．各例題につき，上段は厳密解法 1，下段は厳密解法 2 を表す．また，データの収集方法は近似解法と同様である．表 1 と比較すると，厳密解法の CPU 時間が近似解法のものに比し，短い場合があるが，これは測定誤差と思われる．また，どちらの解法も，今回の例題に対し同じ解を出力した．

表より，厳密解法 1 と 2 を比較すると，平均子問題数は厳密解法 2 が，平均 CPU 時間については厳密解法 1 が優れていることが分かった．

表 2: 厳密解法の結果

例題	$\underline{z}$	$\overline{z}$	子問題数	CPU 時間
$P_{200,560}$	39918	158577	3.425	0.160
			1.119	0.180
$P_{400,1120}$	83171	310928	1.231	0.198
			1.004	0.823
$P_{600,1680}$	126803	473335	1.496	0.425
			1.001	2.328
$P_{800,2240}$	163840	630021	1.007	0.565
			1.000	5.049
$P_{1000,2800}$	203767	782946	1.017	0.854
			1.003	9.302
K_{60}	1413	57720	1.046	0.023
			1.001	0.144
K_{100}	1224	97693	1.002	0.044
			1.000	0.874
K_{140}	1223	137821	1.001	0.077
			1.000	2.864
K_{180}	1264	177866	1.000	0.129
			1.000	7.302

6 結び

近似解法及び厳密解法について，各々 2 つの解法を用いて数値実験を行った．この結果，近似解法については，どちらの解法も的中率 93% 以上であった．しかし，CPU 時間については，全ての例題で近似解法 1 が優れていることが分かった．今後の課題としては，より効率の良い近似解法の開発があげられる．

厳密解法については，CPU 時間について着目すると，厳密解法 1 が優れていた．これは，近似アルゴリズムの部分に時間をかけるより，ある程度 α に近づけた全域木を使用し，早めに分割統治させる方が速く問題を解くことができることを意味している．ただし，前回の実験結果から，全域木の荷重が α から遠いものを使用すると，非常に時間がかかってしまうことが分かっている．以上より，近似アルゴリズムとのトレードオフの決定が今後の課題である．

参考文献

[1] M.R. Garey, *et al.*, *Computers and Intractability*, W.H. Freeman, 1979.

[2] J.B. Kruskal. "On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem", *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7(1956) 48-50.

[3] 高橋元法，山田武夫，コスト α の全域木を検出するアルゴリズム，2000 年度春季ＯＲ学会研究発表会アブストラクト集，1-E-4，2000，pp96-97.