2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

AHP,ANP の固有ベクトル法に対する最適化モデル分析

01206313　静岡大学　関谷和之　Sekitani Kazuyuki

1. はじめに

AHP は1970年代 Saaty[3] に提唱されて以来，現在までに数多くの意思決定問題において活用されている．また，大学のＯＲ関係，経営科学関係の多くの講義でも AHP が紹介されている．

AHP は，評価目的に則して評価項目の階層構造を作成し，評価項目や代替案は一対比較に基づいてそれぞれの一対比較行列を作成し，階層構造に則してそれぞれの解析結果から総合評価するという３段階からなる．AHP の解析での特徴は，一対比較行列の主固有ベクトルを対象の重要度として与えることである．この解析法は固有ベクトル法と呼ばれる．

さらに，Saaty は AHP での階層構造をネットワーク構造に拡張することを試み，これを ANP と名付けた．ANP でもネットワーク構造と各対象の評価結果を超行列と呼ばれる行列で表現した．さらに，超行列をべき乗することで，対象の総合評価値を決定する解析手法を提案している．しかし，この解析方法では十分に解析できない評価構造もあり，解析可能な評価構造の場合でも，冗長な解析手順を含む．一方，高橋 [5] により，ある評価構造においては，ANP での Saaty による解析手法の結果は，固有ベクトル法のそれに一致することが示された．

本報告では，AHP,ANP の解析手法の基本である固有ベクトル法に対して，その数学的基本概念とその最適化モデル [6] を紹介し，さらに，いくつかの AHP のバリエーションや ANP での問題点に対して，統一的な観点からモデル分析できることを報告する．

2. 評価構造と Frobenius 定理

AHP,ANP を統一的に議論するために，評価構造と評価値を表現する評価行列 C を導入しよう．n 個の対象に対して相互評価が行われた結果を n 次の評価行列 C により，次のように表現する．第 (i,j) 要素 c_{ij} には，対象 j から見た対象 i の評価値を与える．ただし，対象 j から見た対象 i の評価が存在しない場合は $c_{ij}=0$ とする．評価値は一般に正の値であるので，評価行列 C は非負行列である

非負行列の絶対値最大固有値は以下の性質をもつ．

定理 1 n 次正方行列 C が非負行列であれば，

1. C の絶対値最大固有値には非負なものが存在する．
2. 非負の絶対値最大固有値に対応する非負の固有ベクトル u が存在する．

非負行列 C の絶対値最大固有値を達成する非負の固有値を主固有値と呼び，$\Lambda(C)$ と記す．行列の既約について紹介する．非負行列 C が既約であることの必要十分条件は，$c_{ij}>0$ ならば，またその時に限り点 j から点 i への枝を結ぶことで生成されるグラフ G が強連結となることである．このグラフ G の枝 (i,j) の重みを c_{ij} としたネットワークを評価のネットワークと呼ぶ．さて，既約非負である評価行列に対して次の性質が成立つ．

定理 2 (Perron-Frobenius の定理) n 次正方行列 C が既約非負行列であれば，

1. $\Lambda(C)>0$ であり，$\Lambda(C)$ は C の固有方程式の単根である．
2. $\Lambda(C)$ に対応する正の固有ベクトル u が存在し，さらに，正の固有ベクトルであれば u のスカラー倍である．

この定理は，固有ベクトル法から得る重要度ベクトルが正であり，(スカラー倍を除いて) 一意であることと，Saaty の解析法から得られる結果と一致することを保証する．つまり，評価行列の既約性は固有ベクトル法でも Saaty の解析法でも鍵となる．しかし，AHP,ANP の評価行列が必ずしも既約性を満たすとは限らない．既約でない評価行列に対して，評価グラフを強連結成分に分解し，以下に述べる固有ベクトル法のモデルを基礎とした解析手法が提案されている [5].

3. 過剰評価率と最適化モデル

非負行列の主固有値は次のように評価できる．

定理 3 (Frobenius の min-max 定理) n 次正方行列 $C=[c_{ij}]$ を非負行列とする．この時，任意のベクトル $p>0$ に対して以下が成立つ．

$$\min_{i=1,\dots,n}\frac{\sum_{j=1}^{n}c_{ij}p_j}{p_i}\le\Lambda(C)\le\max_{i=1,\dots,n}\frac{\sum_{j=1}^{n}c_{ij}p_j}{p_i}.$$

さらに，C が既約であれば，*2* つの最適化問題

$$\max_{p>0}\min_{i=1,\dots,n}\frac{\sum_{j=1}^{n}c_{ij}p_j}{p_i}, \tag{3.1}$$

$$\min_{p>0}\max_{i=1,\dots,n}\frac{\sum_{j=1}^{n}c_{ij}p_j}{p_i} \tag{3.2}$$

の最適値それぞれは，$\Lambda(C)$ と一致し，それぞれの最適解は C の正の主固有ベクトルに限る．主固有ベクトルでない $p>0$ に対して次の不等式が成立する．

$$\min_{i=1,\dots,n}\frac{\sum_{j=1}^{n}c_{ij}p_j}{p_i}<\Lambda(C)<\max_{i=1,\dots,n}\frac{\sum_{j=1}^{n}c_{ij}p_j}{p_i}. \tag{3.3}$$

さて，問題 (3.1),(3.2) を評価ネットワークの上で解釈しよう．点 i で発生するポテンシャルを p_i として，点 j から枝 (j,i) により点 i に流入するポテンシャルを $c_{ij}p_j$ とする．すると，問題 (3.1),(3.2) の各分数式 $(\sum_{j=1}^{n}c_{ij}p_j)/p_i$ の分子は，点 i に流入するポテンシャルの総量であり，分母は点 i のポテンシャルそのものである．したがって，比 $(\sum_{j=1}^{n}c_{ij}p_j)/p_i$ は，点 i で発生するポテンシャルと流入するポテンシャルのずれを示しており，問題 (3.1) は最小比を最大にすることで，問題 (3.2) は，最大比を最小にすることで，各点 i でのポテンシャルのずれを均一化することを意味する．点 i で発生するポテンシャルを対象 i が自己評価して自己申告した価値として考え，p_j として自己評価した対象 j による対象 i の価値を $c_{ij}p_j$ とする．p_i を自己評価値，$c_{ij}p_j$ を対象 j による対象 i の外部評価値と呼ぶ．そして，$\sum_{j\ne i}c_{ij}p_j$ は対象 i 以外から見た対象 i の総価値で，これを外部評価値と呼ぶ．$c_{11}=\cdots=c_{nn}$ であれば，

$$\max_{p>0}\min_{i=1,\dots,n}\frac{\sum_{j\ne i}c_{ij}p_j}{p_i} \tag{3.4}$$

$$\min_{p>0}\max_{i=1,\dots,n}\frac{\sum_{j\ne i}c_{ij}p_j}{p_i} \tag{3.5}$$

の最適解は C の正の主固有ベクトルである．なお，AHP の一対比較行列や ANP の多くの超行列は，$c_{11}=\cdots=c_{nn}$ であ

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

る．過剰評価率を $\sum_{j\neq i} c_{ij}p_j/p_i$ とすれば，問題 (3.4),(3.5) は過剰評価率のばらつき最小化問題である．つまり，過剰評価率のばらつき最小化問題を解くことが固有ベクトル法であるという1つの解釈が成立つ．

なお，K_i を他の点から点 i へ結ぶ枝の総数とし，過剰評価率を $\sum_{j\neq i} c_{ij}p_j/(K_ip_i)$ と考えるのも自然である．すると，ばらつき最小化問題は，

$$\max_{p>0}\min_{i=1,\dots,n}\frac{\sum_{j\neq i} c_{ij}p_j}{K_ip_i},\ \min_{p>0}\max_{i=1,\dots,n}\frac{\sum_{j\neq i} c_{ij}p_j}{K_ip_i}$$

であり，$c_{11}=\cdots=c_{nn}, K_1=\cdots=K_n$ であれば，これらの問題の最適解は C の主固有ベクトルである．

不完全情報下での AHP の一対比較行列 C に対しては，それ特有の解析方法が提案されているが，上記モデルでは，完全情報の一対比較行列と区別なく扱える．

ゲーム論のモデルから固有ベクトル法を考えてみよう．各対象 i は最大過剰評価率 $\max_{i=1,\dots,n}\sum_{j\neq i} c_{ij}p_j/p_i$ を得ることを望み，自己評価値 p_i を独自に決定することができる．対象 i の損失関数を，

$$L^i(p)=\max_{k=1,\dots,n}\frac{\sum_{j\neq k} c_{kj}p_j}{p_k}-\frac{\sum_{j\neq i} c_{ij}p_j}{p_i}$$

とする．この時，全ての $i=1,\dots,n$ で以下の式が成立する正のベクトル $\bar{p}$ を均衡解と呼ぶ．

$$L^i(\bar{p}_1,\dots,\bar{p}_{i-1},p_i,\bar{p}_{i+1},\dots,\bar{p}_n)\geq L^i(\bar{p})\ \forall p_i>0$$

このゲームの均衡解は評価行列 C の主固有ベクトルと一致する．つまり，各対象がどのように自己評価値 p_i を動かそうとも，損失を減らすことができない均衡状態になった時の自己評価値ベクトルが C の正の主固有ベクトルである．したがって，固有ベクトル法の意味を各対象の独自の行動による所産として捉えることができ，主固有ベクトルは全対象における合意形成の結果とも考えられる．

4. ANP における評価値の安定化

評価項目 $\{1,\dots,k\}$ と代替案 $\{k+1,\dots,n\}$ の相互評価構造を持つ ANP を考えよう．評価項目 $\{1,\dots,k\}$ から代替案 i への評価値群を k 次元行ベクトル $w^i=[c_{i1},\dots,c_{ik}]$ とする．代替案 i から評価項目 $\{1,\dots,k\}$ への評価値群を $(n-k)$ 次元列ベクトル $v^i=[c_{k+1i},\dots,c_{ni}]^\top$ とする．経験的事実として v^i は不安定であること [2] が知られている．そこで，S^i を v^i の存在範囲とし，コンパクト集合とする．w^i を第 i 行ベクトルとして持つ行列を W，v^j を第 j 列ベクトルに持つ行列を V とする．w^iv^j をクロス評価値と呼び，$(w^iv^j)/(w^jv^j)$ を第 (i,j) 要素とする評価行列を考える．第 (i,j) 要素は対象 j から見た対象 i の一対比較値である．なお，この評価行列は V に依存して決定するので，$C(V)$ とする．主固有値最小化問題 (4.1) を解き，最適解 $\bar{V}$ を評価項目 $\{1,\dots,k\}$ からの代替案 $\{k+1,\dots,n\}$ への評価値群とする．

$$\min_{V\in\prod S^i}\Lambda(C(V)) \tag{4.1}$$

ここで，$V\in\prod S^i$ は全ての $i=1,\dots,k$ に対して $v^i\in S^i$ であることを意味する．問題 (4.1) の最適解 $\bar{V}$ と $C(\bar{V})$ の左主固有ベクトルは，以下のゲームの均衡状態における各代替案の均衡戦略と一致する．

q_i を単位あたりのクロス評価値に対する代替案 i の満足度とする．各代替案 i は自己の評価基準 $v^i\in S^i$ をうまく選択することで，自己評価による満足度 $q_iw^iv^i$ に対する他の代替案に与える満足度の総和の比を最小化

$$\min_{v^i\in S^i}\frac{\sum_{j\neq i} q_jw^jv^i}{q_iw^iv^i} \tag{4.2}$$

を望むものとする．問題 (4.2) の最適値は，他の代替案に対する代替案 i の評価態度の厳しさを示す．さらに，次の段階で，評価態度が全代替案の中で最も厳しくなることを目指し，各代替案 i は係数 q_i も正の範囲で選択できるものとする．代替案 i は，選択による損失を

$$L^i(q)=\min_{v^i\in S^i}\frac{\sum_{j\neq i} q_jw^jv^i}{q_iw^iv^i}-\min_{l=k+1,\dots,n}\left\{\min_{v^l\in S^l}\frac{\sum_{j\neq l} q_jw^jv^l}{q_lw^lv^l}\right\}$$

で測定する．ある係数ベクトル $\bar{q}$ に対して各代替案 i がどのように係数 q_i を動かしても損失が減少しない場合，つまり各 $i=k+1,\dots,n$ に対して

$$L^i(\bar{q}_{k+1},\dots,\bar{q}_{i-1},q_i,\bar{q}_{i+1},\dots,\bar{q}_n)\geq L^i(\bar{q})\ \forall q_i>0 \tag{4.3}$$

であれば，$\min_{v^i\in S^i}\sum_{j\neq i}\bar{q}_jw^jv^i/(\bar{q}_iw^iv^i)$ の最適解 $\bar{v}^i$ と $\bar{q}_i$ の対を代替案 i の均衡戦略と呼ぶ．(4.3) を達成する $\bar{V}$ は代替案において合意形成された評価項目への評価値群である．同様に，$\max_{V\in\prod S^i}\Lambda(C(V))$ の最適解を均衡解として持つゲームを構成できる．なお，S^i は凸多面体であり，さらに，ある θ_i が存在して任意の $v\in S^i$ に対して $w^iv=\theta_i$ であることが $i=1,\dots,n$ で成立てば，問題 (4.1) 及び $\max_{V\in\prod S^i}\Lambda(C(V))$ を効率的に解くことができる [4].

5. おわりに

本報告では，固有ベクトル法のモデルをいくつか提示した．これらのモデルには意思決定者の意図を組み込むことが可能である．例えば，意思決定者の重要度ベクトルに対する意図が線形制約式で与えられたならば，それらを問題 (3.4), (3.5) 等に組み込めば良く，このモデルを解くには，Dinkelbach タイプのアルゴリズム [1] を利用すれば良い．また，ANP において，各代替案から評価項目への評価値に対する意図は S^i に組み込めば良い．具体的には，DEA や区間 AHP を利用することで S^i を規定することもできる．

本研究の遂行にあたり，日本学術振興会奨励研究 A No. 11780328 及び静岡大学工学振興基金の援助を受けた．

参考文献

[1] J.P. Crouzeix, J.A. Ferland, and S. Shaible: An Algorithm in Generalized Fractional Programming. *Journal of Optimization and Applications* **47**(1985) 35-49.

[2] E. Kinoshita and M. Nakanishi: Proposal of new AHP model in light of dominant relationship among alternatives. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **42**(1999) 180-198.

[3] T.L. Saaty:*Analytic Hierarchy Process* (RWS Publications,Pittsburgh,1996).

[4] K.Sekitani: Estimating the principal eigenvalue of a positive matrix including uncertain data (静岡大学工学部研究報告 1999 年 Vol.50. pp.1-10)

[5] K. Sekitani and I. Takahashi: A unified approach and model for AHP and ANP. *Journal of the Operations Research Society of Japan* に投稿中.

[6] K. Sekitani and N. Yamaki: A logical interpretation for the eigenvalue method in AHP. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **42**(1999) 219-232.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．