2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

不満関数を用いた区間ＡＨＰ

02991883　静岡大学　*劉暁東　Xiaodong LIU
01702108　静岡大学　八巻直一　Naokazu YAMAKI

1　はじめに

集団の意思決定に AHP(Analytic Hierarchy Process) を用いる試みは，Saaty [?] が集団の各メンバが自己の信じる評価項目間の一対比較値を提示し，それらの幾何平均値を集団の一対比較値とすることを提案している。他方，山田ら [?] は，集団の各メンバが自己の信じる一対比較値を，区間で提示することを提案している。しかし,この区間 AHP は実際の適用した時,いくつかの問題点が存在している。例えば，集約された集団の一対比較値が，必ずしも各メンバの主張区間に含まれないが，この場合の解釈についてはなにも示していない。また，集団の一対比較区間を合成する時，各主張区間が共通部分を持たない場合についての解決方法が不十分である。他には，重要度を求めるとき，構成された最適化問題は解きにくい問題となる。

本研究では，不満関数という概念の導入により，山田らの区間 AHP の問題点を解決し，さらに評価項目が多数であるような場合にも適用可能なモデルを提案する。具体的には，不満関数を定義することにより，山田らの主張区間の意味付けを提案する。このとき集団の一対比較区間は，すべての一対比較の組み合わせについても，集団としての不満の大きさをある閾値以下にするように決定される。さらに，重要度を求めるモデルは，対数最小二乗法に基づく最適化問題の解として与えるので，解きやすくかつ不満関数の定義とも適合する。

2　主張区間の意味付け

不満関数は，集団の各メンバが一対比較値に対して提示した主張区間に応じて定義される。主張区間とは，集団の合意形成を目的として，自分の主張に幅を持たせることで妥協表明をする。幅の大きさで主張の強さを表明する。すなわち，狭い区間は強い主張を意味し，広い区間は弱い主張を意味する。一対比較値は，評価項目 i に対する評価項目 j の重要度の比 x_{ij} で表される。ここでは，メンバ k の一対比較値 x_{ij} に対する主張区間を，二つのパラメータによって (p_{ij}^k, q_{ij}^k) と表す。このとき，p_{ij}^k は主張区間の中央値，q_{ij}^k は幅である。ここで，$\bar{x}_{ij}^k = \log x_{ij}^k$ と置いたとき，主張区間とは，$p_{ij}^k - q_{ij}^k \le \bar{x}_{ij}^k \le p_{ij}^k + q_{ij}^k$ となるように集団の一対比較値 x_{ij}^k が定まって欲しいという希望を表す。ただし，これは絶対の制約条件ではない。すなわち，主張区間の外に集団の一対比較値が定まれば，評価者の不満は非常に大きくなると解釈できる。もし，不満の程度が定量化されているとすると，不満がある閾値を超えなければ，主張区間の外に集団の一対比較値が定まっても許容することを意味する。

上記のように主張区間の解釈をするならば，主張区間内では不満が小さく，主張区間の外では急激に不満が大きくなるような，不満の程度を表す関数が存在するはずである。ここでは，次のような関数 g で模型化する。

$$g(x|p,q) = \begin{cases} b(x-p+\beta)^2 + aq\beta, & x \le p-q \\ a(x-p)^2, & p-q < x \le p+q \\ b(x-p-\beta)^2 + aq\beta, & p+q < x \end{cases}$$

ただし，$0 < a << b, 0 < q$,

$$\beta = \left(1 - \frac{a}{b}\right) q$$

関数 g の基本的な性質は，次のとおりである。

1. 狭義凸であり，$x = p$ で最小値 $g(p|p,q) = 0$ をとる。
2. $p-q \le x \le p+q$ の範囲では小さな値をとり，$g(p \pm q|p,q) = aq^2$，$x < p-q$ または $p+q < x$ では急激に大きな値をとる。
3. g は2階微分可能である。

この区分的な2次関数 g を不満関数と呼ぶ。

集団の一対比較値 $\bar{x}_{ij}$ を決定するとき，m 人の中のメンバ k に主張区間 (p_{ij}^k, q_{ij}^k) に対して，不満関数は $g(\bar{x}_{ij}|p_{ij}^k, q_{ij}^k)$ と定義されるから，全員の不満関数の平均値を，集団の不満関数と定義すれば，

$$g_{ij}(\bar{x}_{ij}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} g(\bar{x}_{ij}|p_{ij}^k, q_{ij}^k) \tag{1}$$

と表される。さらに，全ての ij について平均値をとることにより，集団一対比較行列全体の不満関数は次のように表される。

$$G(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\bar{x}_{ij}). \tag{2}$$

ここで，$\bar{X}$ は ij 要素が $\bar{x}_{ij}$ である正方行列である。したがって，集団の合意形成においては，G を最小とするような $\bar{X}$ を採用することが望ましいと解釈できる。

3 集団一対比較値の区間の決定

不満関数 g_{ij} を用いることにより，メンバの主張を次の意味で表現出来る。

- 集団一対比較値が主張区間の中に決定された場合，不満はほとんど零となる。
- 集団一対比較値が主張区間の外に決定された場合，不満は非常に大きな値となる。
- g_{ij} は関与するメンバの不満の平均値なので，集団一対比較値が決定された場合の，グループとしての不満の大きさを表す。

このことより，集団の一対比較行列を決定するには，次の問題1を解けばよい。

問題1 $\min G(X)$

しかしながら，問題1の解 $\bar{X}^{\sharp}$ を集団一つ比較行列とするとき，必ずしも整合度がよいとは限らない。あるいは誤差モデルでいえば，最小二乗誤差が大きくなる可能性がある。そこで本論文では，誤差モデルに基づいて $G(X)$ の値をある程度以下に押さえながら，最小二乗誤差を最小にすることを考える。そのために，すべての i,j について，$g_{IJ}(x) \leq F$ を満たす区間 $[\bar{l}_{ij}, \bar{u}_{ij}]$ を集団一対比較値に対する許容区間を定義する。ここで，F は許容される集団の不満値の上限である。

4 集団の重要度ベクトルの決定

本研究では，不満関数の定義の中で一対比較値の対数変換したものに主張区間を定義している。したがって，重要度ベクトルは対数最小二乗法を用いるのがよりモデルに適合している。さらに，ここでは大規模 AHP[?] の原理に沿って，ある一対比較の組みについては誰も主張区間を提示しない場合と，メンバの一部しか主張区間を提示しない場合を想定する。これにより，評価項目数の大きい問題により適用性が増すことになる。人事評価などでは問題の規模が大きくなり，大規模 AHP の有用性が知られている。[?]

誰にも評価されなかった一対比較の組み i,j については，例えば，$1/9 \leq x_{ij} \leq 9$ などの制約を設けることが考えられる。ここでは，このような場合 $-\rho \leq \bar{x}_{ij} \leq \rho$ とする。また，一対比較の組み i,j に対して m_{ij} 人が主張区間を提示したとすると，

$$g_{ij}(\bar{x}_{ij}) = \frac{1}{m_{ij}} \sum_{k=1}^{m_{ij}} g(\bar{x}_{ij} | p_{ij}^k, q_{ij}^k) \tag{3}$$

と書ける。このとき，集団の一対比較行列 $\bar{X}$ および，集団の重要度ベクトル $\bar{w}$ は以下の2目的最適化問題として定義される。

$$f(\bar{X}) = \frac{\delta}{2} \|\bar{X} - \bar{w}\mathbf{1}^T + \mathbf{1}\bar{w}^T\|_F^2 + \gamma G(\bar{X}) \tag{4}$$

ただし，

$$\begin{aligned} L \leq \bar{X} &\leq U \\ \bar{X} + \bar{X}^T &= 0 \\ \bar{w}^T\mathbf{1} &= \alpha, \end{aligned}$$

ここで α は定数，δ, γ は正のパラメータである。

5 おわりに

本研究では，AHP を集団における意思決定問題に利用するために，不満度関数を用いた区間 AHP を提案した。この方法には，2つの特徴がある。一つは，各評価者の意見の表現方法として，比較値ではなく幅を持った区間を提出する点である，この区間は山田らが提案した主張区間といわれるものであるが，本研究では，不満関数の導入によって区間の意味付けを明確にした。二つ目の特徴は，集団一対比較行列の決定を，対数最小二乗法による重要度導出原理と，集団の不満値最小問題との融合による点である。また，不満の大きさは一対比較値の対数変換した変数の関数であるので，対数最小二乗法が適合的である。

参考文献

[1] Saaty,T.,L.:"*Group Decision Making and The AHP*",The Analytic Hierarchy Process, Springer-Verlag,1989

[2] 山田善靖，杉山学，八巻直一：合意形成モデルを用いたグループＡＨＰ，Journal of the Operations Research Society Japan,Vol.40, p.236-244,1997

[3] 八巻直一，関谷和之：複数の評価者を想定した大規模 AHP の提案と人事評価への適用，Journal of the Operations Research Society of Japan Vol.42, p.405-421,1999