2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

評価のＯＲモデルとその背景にひそむ数理計画·最適化問題

01205220　日本大学　篠原 正明　SHINOHARA　Masaaki

1.　はじめに

ＯＲワーカーが、検討対象を評価する際に採用するモデル（これを評価のＯＲモデル、あるいは単に、評価モデルと呼ぶ）の背景には、その評価モデルを最適性条件の形で必然的結果としてもたらす数理計画·最適化問題（単に、背景問題）が存在するというスタンスを主張する。このようなスタンスをとることにより、評価モデルに不都合が生じた場合に背景問題に立ち戻って考えることができ、より柔軟な対処が可能と考えられる。さらに、表面的には無関係と思われる評価モデル間でも、対応する背景問題間では密接な関係が存在する可能性もある。２節では通信·交通トラヒックO－D行列の要素モデルについて、３節では一対比較行列の要素モデルについて、４節では実験計画法の要因構造式モデルについて、評価モデルと背景問題を論じる。

2.　トラヒックO－D行列の要素モデル

エリアｉからエリアｊへのトラヒック特性値X_{ij}として、(2・1)式の乗数モデルが伝統的に通信、交通の分野で採用されている。

$$X_{ij}=Y_{ij}\times E_i\times F_j \qquad (2-1)$$

但し、E_iは発エリアｉに固有のパラメータ、F_jは着エリアｊに固有のパラメータで、Y_{ij}は定数である。(ｉ,ｊ)要素の評価モデルとして(2－1)式を採用するということは、次の背景問題を考えていることになる。

目的関数：$D(X,Y)=\Sigma_{ij}X_{ij}\log(X_{ij}/Y_{ij})$　(2-2)　最小化

制約条件：$\Sigma_i X_{ij}=a_{.j}$　(2-3)　　$\Sigma_j X_{ij}=a_{i.}$　(2-4)

決定変数：$X=\{X_{ij}\}$

所与データ：$Y=\{Y_{ij}\}$, $a_{i.}$, $a_{.j}$

ここで、目的関数（2-2）は決定変数Ｘと所与変数Ｙの間の距離D(X, Y)として、*Kullback-Leibler*エントロピー距離を採用している。制約条件(2-3)は着エリアjについて総着信トラヒック和を$a_{.j}$に規定する式で、(2-4)は発エリアｉについて総発信トラヒック和を$a_{i.}$に規定する式である。

さらに、表１に、D(X,Y)として、ユークリッド距離、ｐ乗距離、逆エントロピー距離、対称エントロピー距離を採用した場合、制約条件として、発着まとめてトラヒック総和を規定する場合などの評価モデルを示す。

3.　一対比較行列の要素モデル

対象ｊから対象ｉを評価した値x_{ij}として、ＡＨＰなどの一対比較では、(3-1)式の比率モデルを通常採用している。

$$X_{ij}=w_i/w_j \qquad (3-1)$$

ここで、w_iは対象ｉの重みであり、正値を仮定する。さて、(3-1)式の比率モデルを採用することは、どのような背景問題を考えていることになるのであろうか？　１つの答を次に与える。

目的関数：$H=-\Sigma_{ij}X_{ij}\log X_{ij}$　(3-2)　最大化

制約条件：$\Sigma_i X_{ik}-\Sigma_j X_{kj}=p_k$　(3－3)

ここで、目的関数(3－2)は決定変数$X=\{X_{ij}\}$に関するエントロピー最大化であり、制約条件(3－3)は対象ｋのある種の価値p_kは、対象ｋに関する「入力価値フロー和」－「出力価値フロー和」に等しいことを主張する。ところで、(3－2)式のエントロピーHは，次の(3－4)式において、Ｙ={１}とした場合に一致するので、エントロピーH(3－2)式の最大化はＫＬエントロピー距離（3－4）式の最小化と同値である。

$$D(X,Y)=\Sigma_{ij}X_{ij}\log(X_{ij}/Y_{ij}),\ Y_{ij}=1 \qquad (3\text{-}4)$$

さらに、表１に、目的関数として、ｐ乗距離、逆エントロピー距離、対称エントロピー距離を採用した場合の評価モデル、ならびに、評価モデルx_{ij}が２種のウェイトベクトルuとvの比率で(3-5)式で表現される場合の背景問題を示す。

$$X_{ij}=u_i/v_j \qquad (3\text{-}5)$$

4.　実験計画法の要因構造式モデル

実験計画法などの統計解析においてデータに仮定する要因構造式モデルの第１次近似は、通常、(4-1)式で与えられる。

$$X_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j \qquad (4-1)$$

但し、要因数＝２で、μは中心効果、α_iは第一因子の水準がｉ，β_jは第２因子の水準がｊであることの特性値ｘへの効果をあらわすもので主効果と呼ばれている。

第２次近似は、(4-2)式で与えられる（要因数＝２の場合)。

$$X_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+C_{ij} \qquad (4-2)$$

さて、(4-1)式の構造式を仮定することは、どのような背景問題を想定することになるのであろうか？　１つの答を次に与える。

目的関数：$D(X,Y)=\Sigma_{ij}(X_{ij}-Y_{ij})^2,\ Y_{ij}=\mu$　(4－3)　最小化

制約条件：$\Sigma_i X_{ij}=a_{.j}$　(4－4)

$\Sigma_j X_{ij}=a_{i.}$　(4－5)

ここで、目的関数(4-3)式は、中心効果を要素として持つ行列Ｙ={μ}とのユークリット距離の最小化を意味し、制約条件(4-4)は、第一要因の全水準にわたる特性値ｘの総和が第一要因の水準とは無関係な値$a_{.j}$によって規定されることを意味する。制約条件(4-5)も同様である。

さらに、表１に、要因数＝２で第２次近似の構造式(4-2)、要因数＝３で第一次近似の構造式、要因数＝３で第２次近似の構造式に対応する背景問題を示す。又、対象とするデータの種類によっては、ユークリッド距離が不適切な場合もあり、エントロピー距離、ｐ乗距離を計量空間とする場合の評価モデルも与える。

5.　おわりに

トラヒックO～D行列の要素モデル、一対比較行列の要素モデル、実験計画法の要因構造式モデルに関する３つの評価モデルについて、対応する背景問題を論じた。いずれも、適当な制約条件下での適当な距離関数最小化という形式に定式化できた。表１には、思いつく組み合わせの一部分を示したが、これ以外の組み合わせについても空想の世界がさらに広がり、新たな評価モデルが誕生しうる。

表1 評価のORモデルとその背景問題の例

	Models used for Evaluation	Background Optimization Problems	
		Distance Function D(X, Y)	Constraints
O－D Traffic Matrix $X=\{X_{ij}\}$	Multiplicative Model: $X_{ij}=Y_{ij}\times E_i\times F_j$	Ordinary KL Entropy Distance: $\Sigma_{i,j}X_{ij}\log(X_{ij}/Y_{ij})$	Row-Sum and Column-Sum Constraints: $\Sigma_i X_{ij}=a_{.j}$ $\Sigma_j X_{ij}=a_{i.}$
	Additive Model: $X_{ij}=Y_{ij}+E_i+F_j$	Euclidean Distance: $\Sigma_{i,j}(X_{ij}-Y_{ij})**2$	Row-Sum and Column-Sum Constraints
	Additive Fractional Model: $X_{ij}=Y_{ij}/(E_i+F_j)$	Inverted KL Entropy Distance: $\Sigma_{i,j}Y_{ij}\log(Y_{ij}/X_{ij})$	Row-Sum and Column-Sum Constraints
	Super-Functional Model: $X_{ij}=Y_{ij}\times E_i\times F_j\times\exp(Y_{ij}/X_{ij})$	Symmetric KL Entropy Distance: $\Sigma_{i,j}(X_{ij}-Y_{ij})(\log X_{ij}-\log Y_{ij})$	Row-Sum and Column-Sum Constraints
	(p-1)th Root Additive Model: $X_{ij}=Y_{ij}+(E_i+F_j)**(1/(p-1))$	Lp-metric Distance: $\Sigma_{i,j}(X_{ij}-Y_{ij})**p$	Row-Sum and Column-Sum Constraints
	Squared Model: $X_{ij}**2=(Y_{ij}**2)/(E_i+F_j)$	Chi-squared Distance: $\Sigma_{i,j}((X_{ij}-Y_{ij})**2)/X_{ij}$	Row-Sum and Column-Sum Constraints
	Single Vector Model: $X_{ij}=Y_{ij}\times E_i\times E_j$	Ordinary KL Entropy Distance: $\Sigma_{i,j}X_{ij}\log(X_{ij}/Y_{ij})$	Cross-Sum Constraints: $\Sigma_i X_{ik}+\Sigma_j X_{kj}=a_k$
Pairwise Comparison Matrix $X=\{X_{ij}\}$	Ratio Model with Single Weight Vector: $X_{ij}=W_i/W_j$	Ordinary KL Entropy Distance With $Y_{ij}=1$	Cross-Difference Constraints: $\Sigma X_{kj}-\Sigma X_{ik}=P_k$
	Difference Model: $X_{ij}=W_i-W_j$	Euclidean Distance with $Y_{ij}=0$	Cross-Difference Constraints
	Ratio Model with Two Kinds of Weight Vectors: $X_{ij}=U_i/V_j$	Ordinary KL Entropy Distance With $Y_{ij}=1$	Row-Sum and Column-Sum Constraints
	(p−1)th Root Difference Model: $X_{ij}=(W_i-W_j)**(1/(p-1))$	Euclidean Distance with $Y_{ij}=0$	Cross-Difference Constraints
Block Design Factor Model	First-order Additive Model with Two Factors: $X_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j$	Euclidean Distance with $Y_{ij}=\mu$	Row-Sum and Column-Sum Constraints
	Second-order Additive Model with Two Factors: $X_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+C_{ij}$	Euclidean Distance with $Y_{ij}=\mu+C_{ij}$	Row-Sum and Column-Sum Constraints
	First-order Additive Model with Three Factors: $X_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_k$	Euclidean Distance with $Y_{ijk}=\mu$ $[X=\{X_{ijk}\},\ Y=\{Y_{ijk}\},\ D(X,Y)=\Sigma_{ijk}(X_{ijk}-Y_{ijk})**2]$	Two-Index-Sum Constraints: $\Sigma_{j,k}X_{ijk}=a_{i..}$ $\Sigma_{i,k}X_{ijk}=a_{.j.}$ $\Sigma_{i,j}X_{ijk}=a_{..k}$
	Second-order Additive Model with Three Factors: $X_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_k+C_{ij}+D_{ik}+E_{jk}$	Euclidean Distance with $Y_{ijk}=\mu$ $[X=\{X_{ijk}\},\ Y=\{Y_{ijk}\},\ D(X,Y)=\Sigma_{ijk}(X_{ijk}-Y_{ijk})**2]$	Two-Index-Sum Constraints＋Single-Index-Sum Constraints: $\Sigma_k X_{ijk}=a_{ij.}$ $\Sigma_j X_{ijk}=a_{i.k}$ $\Sigma_i X_{ijk}=a_{.jk}$
	Third-order Additive Model with Three Factors: $X_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_k+C_{ij}+D_{ik}+E_{jk}+F_{ijk}$	Euclidean Distance with $Y_{ijk}=\mu+F_{ijk}$ $[X=\{X_{ijk}\},\ Y=\{Y_{ijk}\},\ D(X,Y)=\Sigma_{ijk}(X_{ijk}-Y_{ijk})**2]$	Two-Index-Sum Constraints＋Single-Index-Sum Constraints
	First-Order Multiplicative Model with Two Factors: $X_{ij}=\mu\times\alpha_i\times\beta_j$	Ordinary KL Entropy Distance with $Y_{ij}=\mu$	Row-Sum and Column-Sum Constraints
	First-Order Additive Fractional Model With Two Factors: $X_{ij}=\mu/(\alpha_i+\beta_j)$	Inverted KL Entropy Distance with $Y_{ij}=\mu$	Row-Sum and Column-Sum Constraints
	First-Order (p−1)th Root Additive Model: $X_{ij}=\mu+(\alpha_i+\beta_j)**(1/(p-1))$	Lp-metric Distance with $Y_{ij}=\mu$	Row-Sum and Column-Sum Constraints