2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

待ち行列理論：その限界と可能性

01602570　東京理科大学　宮沢 政清　MIYAZAWA Masakiyo

1. 待ち行列理論は役立つのか

サービスや生産システムの設計や効率的な運用ために，確率モデルを作り解析する．これが待ち行列理論の目的である．よく知られているように，アーランによる電話交換機の呼損率の研究に端を発している．その後，Pollaczek・Khintchineの $M/G/1$ 型待ち行列の研究，Feller [3]，Schpizer等による $GI/G/1$ 型待ち行列の研究，Jackson，Kellyによる積形式待ち行列ネットワークの研究などがあった．これらの研究が出そろった1970年代にはすでに理論的な限界が指摘され始めていた．その後，現実の問題は益々複雑となり，理論的に解析できるモデルと現実のモデルの差は大きく広がっている．

一方において，計算機，特にパソコンの急激な進歩により，モデルさえできればシミュレーションにより簡単に結果を出すことができるようになった．極端な意見ではあるが，待ち行列の理論は結果を信用してもらうために飾りとして使うだけで，本当はシミュレーションだけで十分であると言う人もいる．実はシミュレーションにおいてもモデルを作る段階や実行結果の分析などに待ち行列理論や確率過程理論の結果を使っていて，計算機を動かすことが全てではない．

しかし，待ち行列の理論的な研究が壁にぶつかっていると感じている人が多いのも事実である．実際に，情報通信の急激な発展により研究の対象となる素材はたくさんあるのに，理論的な論文が簡単に書けない．本稿では，主に定常解析について，どこに難しさがあり，それを乗り越えて行くにはどんなアプローチが可能かを論じる．ここに，定常解析とは，モデルの状態についての定常分布，すなわち，長時間稼働したときに各状態の起こる確率を求めることである．定常分布はモデルの性能評価のための基本的な量である．

2. 待ち行列の典型的なモデル

待ち行列モデルは大きく分けると単一ノード型とネットワーク型の２つになる．**単一型モデル**では，到着した客が１回だけサービスを受ける．しかし，単一型モデルでも客の種類やサービスの窓口が複数ある場合があり，複数の待ち行列ができることがある．これに対して**ネットワーク型**では客は一般に異なる窓口で２回以上のサービスを受ける．ネットワーク型は複数の単一型モデルを客の経路により結合したものと考えることができる．どちらのシステムでも，外部から客が到着し，外部へ退去するとき，**開放型**と呼ぶ．これに対して，**閉鎖型**では，客はシステム内を循環する．開放型の場合には，客の到着過程をモデル化する必要がある．

3. 定常解析の方法

待ち行列理論の研究は単一ノード型モデルの研究から始まったが，ネットワーク型モデルの研究も独自の発展をしてきた．これはネットワークでは各ノードへの客の到着が複雑になり単一型の解析が必ずしもネットワーク型の解析に役立たないことによる．ネットワークモデルは積形式ネットワークのように独自の仮定の下で解析されることが多い．1970年代までは，

（定常解析）＝（解析的に定常分布を求める）

とする考え方が強く，限界があった．1980年代以降は，定常状態の特性をできるだけ一般的な仮定の下で調べる方法や，数値的に定常分布を求める方法が発展してきた．例えば，リトルの公式の拡張や数値計算アルゴリズムの研究が進んだ．今日では，定常解析の目的が厳しく問われるようになっている．一般に定常解析の方法は，次の４つに分けることができる．

(i) 安定性：定常分布の存在を調べる．

(ii) 解析的表現：数式として求める．

(iii) 数値計算：計算アルゴリズムなど．

(iv) 特性の分析：関係式，漸近的特性，頑健性，不等式評価など．

特に，(i)，(iii)，(iv) の分野は1980年代以降に飛躍的に発展した．点過程によるモデル化，位相型分布を持つ単一ノード型モデルに対するNuetsの行列幾何形

式解，大偏差値理論などがある．しかし，ネットワークモデル（単一ノードでも複数の待ち行列ができる場合を含む）については特殊なモデルを除くと，依然として難しい問題として残されている．

4. ネットワークモデルの難しさ

一般にコントロールのない待ち行列は，1次元または多次元の非負値領域上のランダムウォークで，境界又はその近傍において状態推移を変更したものによりモデル化することができる．単一ノード型モデルの定常解析が比較的に容易なのは境界が本質的に一次元的であることによる．例えば位相型モデルでは，境界から離れた場所での平衡方程式を解き基本解を求めれば，解の個数は有限個であり，これらの基本解と境界条件により定常分布を決めることができる．

これに対して，複数の待ち行列のあるモデルやネットワーク型モデルでは状態空間が本質的に多次元であり，基本解の個数も非可算無限にある．また，境界も多次元であり，境界条件を満たすような定常方程式の解を見つけることは非常に困難である（多次元の境界値問題と呼ばれている）．ただし，特殊な条件下では定常分布が容易に決まることがある．例えば，積形式ネットワークでは，境界条件が簡単になり，1つの基本解で決まることが多い（[2] を参照）．

このようにネットワーク問題は難しく，安定性でさえ十分にわかっていない．例えば，他種類の客があるモデルで，先着順サービスや優先権を付けたサービスを行うときには異なるノード間で干渉が起こり不安定になることがある．1990年代以後，この問題については流体近似モデルの振る舞いと結びつけることにより大きな進展があった．

もう1つ注目されている問題は，分布の裾の減少率である．最近の通信ネットワークでは高い品質が要求されるため，呼損率などで大変小さな値の確率（例えば，10^{-9}）を計算する必要がある．そこで，分布がわからない場合に，分布の裾の減少率を調べることが重要になってきた．この減少率に関しては大偏差値理論（Large deviation theory）により，かなり一般的な入力過程を持つ待ち行列に対して値を求めることができる（[4]）．ただし，この場合も状態空間が1次元的である場合に限られている．最近，大偏差値理論は使わずに，定常方程式の解を直接調べることにより多次元の分布の裾を調べる研究が進められている．以下ではこの問題について詳しく述べ，解の予想をする．

5. 分布の裾の減少率

X を非負の値を取る確率変数とするとき，ある正の数 a, b に対して，

$$\lim_{x\to\infty} P(X > x)/e^{-ax} = b \tag{5.1}$$

ならば，X の分布の裾が率 a で指数的に減少するという．少し弱い概念として，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\log P(X > x) = -a \tag{5.2}$$

がある．(5.1) ならば (5.2) であるが，逆は一般に成り立たない．大偏差値理論では主に (5.2) の減少率を求める．これだけでも応用上は役立つ．なお，X が整数値を取る場合には，e^{-a} を ρ で置き換えて，率 ρ で幾何的に減少するという．

簡単な例として，窓口が1つで先着順サービスの $GI/G/1$ モデルについて考えてみる．n 番目の客のサービス時間を S_n，n 番目と $n+1$ 番目の客の到着間隔を T_n とし，$U_n = S_n - T_n$ とおく．S_n，T_n は互いに独立で，それぞれ，独立同一分布に従う．n 番目の客の待ち時間を W_n とすると，W_{n+1} は

$$W_{n+1} = \max(0, W_n + U_n)$$

と表すことができる．$E(T) > E(S)$ とすれば定常状態が存在する．このとき，定常状態での待ち時間 W は，

$$W \overset{d}{\simeq} \max(0, W + U) \tag{5.3}$$

を満たす．ここに，$\overset{d}{\simeq}$ は分布が等しいことを表す．これより，

$$\begin{aligned} P(W > x) &= P(W + U > x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(W > x - u)dP(U \le u) \end{aligned} \tag{5.4}$$

が成り立つ．ここで，(5.1) が成り立ち，$P(S > x)$ が指数的に減少するとすると，

$$e^{-ax} \sim \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x-u)}dP(U \le u)$$

であるから，a は

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{au}dP(U \le u) = E(e^{a(S-T)}) \tag{5.5}$$

を満さなければならない．安定性の条件 $E(T) > E(S)$ より，(5.5) を満たす $a > 0$ は唯1つである．すなわち，減少率 a が求められた．

この論法では，定常方程式 (5.3) のうち，境界0に関係しない方程式 (5.4) を使って減少率 a を決めている．この a は基本解 e^{-ax} を与えるが，定常分布そのものを求めるには役立たない．しかし，Kingmanの上界と呼ばれる次の不等式が成り立つ．

$$P(W > x) \leq e^{-ax}$$

確率変数 X がベクトル $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ の時には，減少率を，正の定数ベクトル $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_k)$ に対して，内積 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X} \equiv \sum_{i=1}^{k} c_i X_i$ を用いて，

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \log P(\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X} > x) = -a \tag{5.6}$$

により定義する．この a を $\boldsymbol{c}$ 方向の減少率と呼ぶ．

6. 減少率のパラダイム

ネットワーク型モデルの定常分布の裾の減少率を求める方法を2つの開放型モデルについて提案する．

6.1 マルコフ型集団移動モデル

客の到着間隔やサービス時間が全て指数分布に従うとする．このモデルは各ノードの客数を状態に取り，状態変化が起こった時点に注目すれば，離散時間マルコフ連鎖で表すことができる．ネットワークは1から k までの番号のついた k 個のノードからなる．状態変化はポアソン過程に従って起こる．状態 $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ の変化時点ではベクトル $\boldsymbol{D} = (D_1, \ldots, D_k)$ の退去要求があり，この要求をできるだけ満たす退去が起こり，引き続きベクトル $\boldsymbol{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ からなる到着が起こる．すなわち，n 番目の状態変化直後の状態を $\boldsymbol{X}_n$ のように表すと，

$$\boldsymbol{X}_{n+1} = \max(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{D}_n) + \boldsymbol{A}_n$$

が成り立つ．したがって，定常状態では

$$\boldsymbol{X} \overset{d}{\simeq} \max(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{X} - \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{A} \tag{6.1}$$

である．$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{A}$ は一般の結合分布を持つとする．定常確率 $P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{n})$ の基本解を $\prod_{i=1}^{k} \rho_i^{n_i}$ とすると $\boldsymbol{n}$ が境界から離れているとき，(6.1) より，

$$\prod_{i=1}^{k} \rho_i^{n_i} = \prod_{i=1}^{k} \rho_i^{n_i} E\left(\prod_{i=1}^{k} \rho_i^{-A_i + D_i}\right) \tag{6.2}$$

が成り立つ．$\tau_i = -\log \rho_i$，$\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ とするとき，$\boldsymbol{\tau} = -\log \boldsymbol{\rho}$ と表す．このとき，(6.2) は，

$$E\left(\prod_{i=1}^{k} e^{-\tau_i (D_i - A_i)}\right) = 1 \tag{6.3}$$

となる．定常分布が存在するならば，各ノードごとの定常分布も存在するので，$\tau = (0, \ldots, 0, \tau_i, 0, \ldots, 0)$ で (6.3) を満たし，かつ $\tau_i > 0$ となるものが唯1つ存在する．この τ_i を τ_i^0 と表し，$\boldsymbol{\tau}^0 = (\tau_1^0, \ldots, \tau_k^0)$ とおく．集合 $\mathcal{K}$ を以下のように定義しよう．

$$\mathcal{K} = \{\boldsymbol{\tau} \geq \boldsymbol{0};\ (6.3) \text{ が成立}, \boldsymbol{\tau} \leq \boldsymbol{\tau}^0\}$$

予想 6.1 $\boldsymbol{A}$ の積率母関数 $E(e^{\boldsymbol{s}'\boldsymbol{A}})$ がある非負な $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{0}$ で存在するとき，任意の $-\log \boldsymbol{\rho} \in \mathcal{K}$ に対して，

$$P(\boldsymbol{X} > \boldsymbol{n}) \leq \prod_{i=1}^{k} \rho_i^{n_i} \tag{6.4}$$

が成り立つ．この上界と $P(\boldsymbol{X} > \boldsymbol{n})$ の $\boldsymbol{c}$ 方向の減少率は一致する．すなわち，$r\boldsymbol{c} \in \mathcal{K}$ $(r > 0)$ ならば，

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{n} \log P(\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X} > n) = -r. \tag{6.5}$$

注 6.1 (i) $\mathcal{K}$ は凸集合

$$\mathcal{K}^* = \left\{\boldsymbol{\tau} \geq \boldsymbol{0}; E\left(\prod_{i=1}^{k} e^{-\tau_i (D_i - A_i)}\right) \leq 1, \boldsymbol{\tau} \leq \boldsymbol{\tau}^0\right\}$$

の境界に含まれる．
(ii) 集合 $\mathcal{K} \cap \{\boldsymbol{\tau} > \boldsymbol{0}\}$ が1点からなる場合がある．ネットワークはこのときに限り，幾何型の積形式解を持つ．ジャクソンネットワークはその典型である．

既存の結果 6.1 (i) $\boldsymbol{c}$ が単位ベクトルの場合には5節の結果から (6.5) が確かに成り立っている．
(ii) 集団移動が同時に起こるノードが退去と到着でそれぞれ1つの場合，$\mathcal{K} \cap \{\boldsymbol{\tau} > \boldsymbol{0}\} \neq \emptyset$（[2]）．
(iii) 客の数を連続量で置き換えた流体近似モデルにおいて，$\boldsymbol{A}$ が定数ベクトルの場合にこの予想が $\mathcal{K}$ を更に制限した形で確かめられている（[6]）．

6.2 一般化ジャクソンネットワーク

k 個のノードがあり，各ノードへの到着が GI 型（間隔 T_i）で，各ノードは1つの窓口で一般分布に従うサービス（時間 S_i）を行う．到着と退去は1人づつで，ノード i でサービスを完了した客は確率 p_{ij} でノード j に到着する．ここに p_{i0} は外部へ退去する確率である．この経路選択はネットワークの状態とは独立とする．

このネットワークをマルコフ過程で表すために，時刻 t での次の到着までの残り時間 $R_i^A(t)$) とサービス完了までの時間 $R_i^S(t)$) を状態に取り込む．時刻 t でのネッ

トワーク内の待ち人数ベクトルを $\boldsymbol{X}(t)$ で表す．このとき，ネットワークの状態は

$$\boldsymbol{Y}(t) = (\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{R}^{\mathrm{A}}(t), \boldsymbol{R}^{\mathrm{S}}(t))$$

で表される．$\boldsymbol{Y}(t)$ についての定常方程式を立て，連続量 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{A}}(t), \boldsymbol{R}^{\mathrm{S}}(t)$ についてはラプラス変換を取る．一見複雑な計算に見えるが，率保存則を使うと簡単に計算できる．定常状態では，$\boldsymbol{X}(t)$ を $\boldsymbol{X}$ のように表す．$\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{n}$ を k 次元ベクトルとし，以下の関数を定義する．

$$\varphi(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}) = E\left(e^{-\boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{D}}}; \boldsymbol{X} = \boldsymbol{n}\right)$$
$$\varphi_i^{\mathrm{A}}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}) = E_i^{\mathrm{A}}\left(e^{-\boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{D}}}; \boldsymbol{X} = \boldsymbol{n}\right)$$
$$\varphi_i^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}) = E_i^{\mathrm{D}}\left(e^{-\boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{R}^{\mathrm{D}}}; \boldsymbol{X} = \boldsymbol{n}\right)$$

ここに，E_i^{A} (E_i^{D}) はノード i へ客の到着直前（退去直後）の分布（パルム分布）についての期待値である．$\boldsymbol{n} > \boldsymbol{0}$ のときの定常方程式は率保存則（[7] など参照）より，

$$\left(\sum_{i=1}^{k}(\theta_i + \eta_i)\right)\varphi(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}) \tag{6.6}$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\varphi_i^{\mathrm{A}}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}) - \varphi_i^{\mathrm{A}}(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})f_i(\theta_i)\right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha_i\left(\varphi_i^{\mathrm{D}-}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}) - \varphi_i^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})\right)p_{ij},$$

ここに，$f_i(\eta_i) = E(e^{-\eta_i S_i})$，$\lambda_i = 1/ET_i$，$\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{0}$，$\alpha_i$ はトラヒック方程式から決まるノード i への総到着率である．また，$g_i(\eta_i) = E(e^{-\theta_i T_i})$ とし，

$$\varphi_i^{\mathrm{D}-}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}) = \varphi_i^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})/g_i(\eta_i)$$

とする．(6.6) の基本解を

$$\varphi_i^u(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}) = \hat{\varphi}_i^u(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})\prod_{i=1}^{k}\rho_i^{n_i}, \qquad u = \mathrm{A}, \mathrm{D}$$

と仮定する．これらを (6.6) へ代入すると，

$$\sum_{j=1}^{k}(\theta_j + \eta_j) = 0, \tag{6.7}$$
$$\rho_i = f_i(\theta_i), \quad \text{ただし，} \lambda_i > 0 \text{ のとき} \tag{6.8}$$
$$1 = \rho_i g_i(\eta_i)\left(p_{i0} + \sum_{j=1}^{k}p_{ij}\rho_j^{-1}\right) \tag{6.9}$$

ならば，(6.6) が満たされる．6.1 節の場合と同様に，

$$\mathcal{L} = \left\{\boldsymbol{\theta} \geq \boldsymbol{0}; (6.7), (6.8), (6.9) \text{ が成立}, \boldsymbol{\theta} \leq \boldsymbol{\theta}^0\right\}$$

とおく．ここに，$\boldsymbol{\theta}^0$ の i 番目の要素 θ_i^0 は，$\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{L}$ で，すべての θ_j $(j \neq i)$ を条件 $\eta_j < 0$ $(j \neq i)$ を満たすように変化させたときの θ_i の上限値とする．

予想 6.2 $g_i(\eta_i)$ がある $\eta_i < 0$ で存在するとき，任意の $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{L}$ に対して，ある正の定数 C があり，$\rho_i = f_i(\theta_i)$ とおくと

$$P(\boldsymbol{X} > \boldsymbol{n}) \leq C\prod_{i=1}^{k}\rho_i^{n_i} \tag{6.10}$$

が成り立つ．この上界の下限と $P(\boldsymbol{X} > \boldsymbol{n})$ の $\boldsymbol{c}$ 方向の減少率は一致する．すなわち，ある $r > 0$ に対して $rc_i = -\log f_i(\theta_i)$ となる $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{K}$ で極大となるものが存在するならば，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\log P(\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X} > n) = -r. \tag{6.11}$$

注 6.2 $\mathcal{K}$ と同様に，$\mathcal{L}$ は凸集合の境界に含まれる．
既存の結果 6.2 (i) $k = 2$ の場合に，(6.10) が同様な条件の下で位相型分布を仮定して確かめられている（[5]）．正確には条件が少し異なっているので今後詳しく調べる必要がある．(ii) $\mathcal{L} \cap \{\boldsymbol{\theta} > \boldsymbol{0}\} \neq \emptyset$ や (6.11) については全くわかっていない．

7. プロローグ

当初は減少率以外の問題も紹介する予定であった．しかし，減少率だけでもこれほど多くの問題が残されている．この他にも，集団でサービスすると 1 人当たりのサービス時間が短くなる準加法的サービスモデル [1] など，待ち行列には面白い問題がたくさんある．予想 6.1, 6.2 の証明も含め是非挑戦してもらいたい．

参考文献

[1] D. Aldous, M. Miyazawa and T. Rolski (2000) On the stability of a batch clearing system with Poisson arrivals and subadditive service times, preprint

[2] X. Chao, M. Miyazawa and M. Pinedo (1999) *Queueing Networks; customers, signals and product form solutions*, Wiely.

[3] W. Feller (1971) *An Introduction to Probability Theory and Its Application*, Vol. II, Wiely.

[4] P. Glynn and W. Whitt (1994) Logarithmic asymptotics for steady state tail probabilities in a single-server queue, *J. Appl. Prob.* **31A**, 131-156.

[5] K. Katou and N. Makimoto (2000) Upper bounds for the decay rates of the joint distribution in tow-node Markovian queues, シンポジウム報文集，情報通信ネットワークの新しい性能評価法に関する総合的研究，仙台．

[6] O. Kella and M. Miyazawa (2000) Parallel fluid queues with constant inflows and simultaneous random reductions, preprint.

[7] M. Miyazawa (1994) Rate conservation laws: a survey, *Queueing Systems* **15**, 1-58.