

## 循環 Tree 型かんぱんシステムにおいて aggregation 法による近似解析

02991680 東京工業大学 \*梁云 LIANG Yun

01302440 東京工業大学 高橋幸雄 TAKAHASHI Yukio

### 1 はじめに

かんぱんシステムは実際の生産システムとして広く利用されている。本研究では、組立型生産システムの一つである循環 Tree 型かんぱんシステムのモデルを考える。循環 Tree 型モデルにおいては段数が少しでも増えると状態数が爆発的に多くなり、平衡方程式を計算機で直接解くことが難しくなる。またシミュレーションによる解析でも高い精度を出すのは時間的に困難である。この問題を解決するため、aggregation 法を用いて近似解析を行った。

### 2 モデル

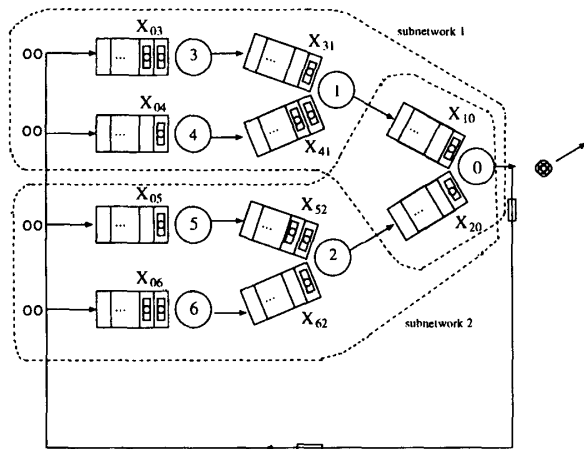


図 1: 7-node kanban system

循環 Tree 型かんぱんシステム待ち行列ネットワークはかんぱんにより制御する組立型生産システムをモデル化したものである。3 種類のノードがあり、葉ノード、中間ノードと根ノードからなる。各葉ノードは単一入力バッファを持ち、各中間ノードと根ノードはそれぞれ複数の入力バッファを持つ。外部から入って来た部品は葉ノードでかんぱんを付けてサービスを受ける。サービス終了後、かんぱんを付けたまま中間ノードへ進み、中間ノードと根ノードで順次にサービスを受ける。複数の入力バッファを持つ中間ノードまたは根ノードにおいては、その複数のバッファにある部品がひとつずつ組み合わされて、サービスを受ける。従って、そのノードの全ての入力バッファに一つ以上部品がある場合のみサービスが始まる。根ノードでのサービス終了後、組み合わされた部品は外部へ退去され、か

んぱんはバラバラにされて各葉ノードへ戻される。そこでまた新しい部品につけられ、次の循環が始まる。

#### 仮定

1. 各ノードでのサービス時間は指数分布  $\mu_i$  に従い、互いに独立である。
2. 葉ノードでは、かんぱんがある場合にサービスを行う。
3. かんぱんの数は各部品ごと一定である。
4. 各バッファの容量は充分あり、ブロッキングは起こらない。

### 3 マルコフ的表現

この節では、7 ノードモデル (図 1) を例として解析を説明する。

#### 記号

- ノード番号  $0, 1, \dots, 6$
- $N_i, i = 3, 4, 5, 6$ : 葉ノード  $i$  から流れ始めるかんぱんの数
- $B_{ij}$ : ノード  $i$  からノード  $j$  へ進む部品が溜っているバッファ ( $ij = 03, 04, 05, 06, 10, 20, 31, 41, 52, 62$ )
- $X_{ij}$ :  $B_{ij}$  にある部品数 (= かんぱん数) を表す確率変数 (サービス中のものを含む)

かんぱんの数固定されているため、モデルは確率過程  $X(t) = (X_{10}(t), X_{20}(t), X_{31}(t), X_{41}(t), X_{52}(t), X_{62}(t))$  によって表現できる。状態空間は

$$S = \left\{ n \begin{array}{l} n_{31} = 0, 1, \dots, N_3 - n_{10}, \\ n_{41} = 0, 1, \dots, N_4 - n_{10}, \\ n_{52} = 0, 1, \dots, N_5 - n_{20}, \\ n_{62} = 0, 1, \dots, N_6 - n_{20}, \\ n_{10} = 0, 1, \dots, \min(N_3, N_4), \\ n_{20} = 0, 1, \dots, \min(N_5, N_6) \end{array} \right\}$$

となる。ただし  $n = (n_{10}, n_{20}, n_{31}, n_{41}, n_{52}, n_{62})$  である。  $X(t)$  はエルゴード的連続時間マルコフ連鎖となる。その推移速度行列を  $Q = (q_{kl}, k, l \in S)$  とすると、定常分布  $\pi = (\pi(n_{10}, n_{20}, n_{31}, n_{41}, n_{52}, n_{62}))$  は平衡方程式  $\pi Q = 0$  により求められる。

計算量を減らすため、aggregation 法により定常分布の近似解析を行った。

## 4 aggregation 法による近似解析

7 ノードモデルにおいてサブネットワーク 1 とサブネットワーク 2 を定義する (図 1)。サブネットワーク 1 はノード 0, 1, 3, 4 から成り、サブネットワーク 2 はノード 0, 2, 5, 6 から成る。

サブネットワーク 1 をベースとして状態空間  $S$  を分割する。

$$Z^1 = \left\{ (n_{10}, n_{20}, n_{31}, n_{41}) \left| \begin{array}{l} 0 \leq n_{31} \leq n_{10}, \\ 0 \leq n_{41} \leq n_{10}, \\ 0 \leq n_{10} \leq \min(N_3, N_4), \\ 0 \leq n_{20} \leq \min(N_5, N_6) \end{array} \right. \right\}$$

とし、状態空間  $S$  は部分集合

$$A^1(n_{10}, n_{20}, n_{31}, n_{41}) = \left\{ n \left| \begin{array}{l} 0 \leq n_{52} \leq N_5 - n_{20}, \\ 0 \leq n_{62} \leq N_6 - n_{20} \end{array} \right. \right\}$$

の和の形に分割される。ここで  $(n_{10}, n_{20}, n_{31}, n_{41}) \in Z^1$  である。

この分割によって  $X(t)$  から定義される aggregated process  $Y^1(t)$  の定常分布  $\pi^1(n_{10}, n_{20}, n_{31}, n_{41})$  を求めるには、 $Y^1(t)$  の推移速度行列に現れる条件付き確率  $\pi(n_{52}, n_{62} | n_{10}, n_{20}, n_{31}, n_{41})$  らを決めなければならない。

同様に、サブネットワーク 2 をベースとして状態空間  $S$  を  $A^2(n_{10}, n_{20}, n_{52}, n_{62})$  らと分割する。この分割によって定義される aggregated process  $Y^2(t)$  の定常分布  $\pi^2(n_{10}, n_{20}, n_{52}, n_{62})$  を求めるため、推移速度行列に現れる条件付き確率  $\pi(n_{31}, n_{41} | n_{10}, n_{20}, n_{52}, n_{62})$  らを決めなければならない。

二つのサブネットワークは共通の部分であるノード 0 を通して互いに影響する。ここでは直接に繋がっていない部分の影響がほぼ無視できるものと仮定する。

仮定

$$\begin{cases} \pi(n_{52}, n_{62} | n_{10}, n_{20}, n_{31}, n_{41}) = \pi^2(n_{52}, n_{62} | n_{10}, n_{20}) \\ \pi(n_{31}, n_{41} | n_{10}, n_{20}, n_{52}, n_{62}) = \pi^1(n_{31}, n_{41} | n_{10}, n_{20}) \end{cases}$$

ここで、

$\pi^1(n_{31}, n_{41} | n_{10}, n_{20})$ : サブネットワーク 1 より求めた  $\pi^1(n_{10}, n_{20}, n_{31}, n_{41})$  に基づいて計算された条件付き確率、

$\pi^2(n_{52}, n_{62} | n_{10}, n_{20})$ : サブネットワーク 2 より求めた  $\pi^2(n_{10}, n_{20}, n_{52}, n_{62})$  に基づいて計算された条件付き確率

とする。

サブネットワーク 2 の結果  $\pi^2(n_{10}, n_{20}, n_{52}, n_{62})$  を使ってサブネットワーク 1 の  $\pi^1(n_{10}, n_{20}, n_{31}, n_{41})$  を

求め、またその結果を用いてサブネットワーク 2 の  $\pi^2(n_{10}, n_{20}, n_{52}, n_{62})$  を求める。このような反復を実行すると 7 ノードモデルでは 10 回程度の反復で収束する。これらの結果からスループットなどの特性量が計算できる。

## 5 実験結果

7 ノードモデルにおいて  $N_3 = N_4 = N_5 = N_6 = 3$  のときの数値実験を行った。スループットは表 1 の通りである。すべての  $\mu_i$  が等しい場合は、二つのサブネットワークのバランスがとれていて、近似精度が一番悪い。バランスが崩れば崩れほど近似精度がよくなる。

一つのモデルにおいてかんぱんの数  $N$  が違ってても近似精度は殆んど変わらない。一方、計算量は  $N$  が大きければ大きいほど、厳密解を求めるのに比べて大幅に減ぜられ、より有効な近似法となる。

表 1: throughput for 7-node model

$(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6)$	exact	approx.
(1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0)	0.49056	0.48681
(4.3, 3.0, 1.5, 4.0, 1.5, 7.0, 5.5)	1.15485	1.15310
(1.0, 10.0, 0.1, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0)	0.09952	0.09952

次に 15 ノードモデルに対して同様の近似計算を行った。15 ノードモデルにおいてすべての  $\mu_i = 1.0, N_i = N$  のときのスループットは表 2 の通りである。このシミュレーションによるスループットは実験を 10 回行って 95% 信頼区間を求めたものである。

かんぱんの数が増えると近似精度は若干良くなった。モデルの段数が増えると近似精度は少し落ちそうな傾向が見えた。

表 2: throughput for 15-node model

N	simulation	approx.
1	0.159 ± 0.000	0.147145
3	0.376 ± 0.006	0.367416
5	0.510 ± 0.008	0.502285

## 参考文献

- [1] Y. Takahashi. Aggregate Approximation for Acyclic Queueing Networks with Communication Blocking. *Queueing Networks with Blocking*, H.G. Perros and T. Altioik (Eds.), North-Holland (1989), 33-46.
- [2] 高橋幸雄, 牧本直樹. 相型分布と行列解析法. オペレーションズリサーチ, Vol 43 (1998), 562-567.