2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

1回の取り替えを含む保証の下での年齢取り替え方策

02800014 流通科学大学大学院 * 林坂 弘一郎 RINSAKA Koichiro
01204194 流通科学大学情報学部 三道 弘明 SANDOH Hiroaki
01400043 愛知工業大学 中川 覃夫 NAKAGAWA Toshio

1. はじめに

信頼性・保全性理論は Barlow and Proschan [1] 以来，長い歴史をもっている．これに対して，保証に関する研究は最近数十年間行われている [2]．このような状況の下，Iskandar and Sandoh [3] や Iskandar, Klefsjö and Sandoh [4] は，保証を考慮した機会-年齢取り替え政策を議論した．

本研究では，保証期間中の1回目の故障に対して取り替えが無料で実施され，同期間中の2回目以降の故障に対しては小修理が無料で実施される保証政策の下で保証されたシステムの，最適取り替え年齢を考える．

2. モデル

本研究では以下のような問題を考える．システム導入後の保証期間を $(0,\tau]$ とする．システムがこの保証期間中に故障すれば，取り替えが無料で実施される．なお，この取り替えたシステムは最初のシステムの保証期間のうち，残りの期間保証される．すなわち，最初の故障時刻を $x(\geq 0)$ とすると，取り替えたアイテムの保証期間は $(x,\tau]$ である．

取り替えたアイテムが $(x,\tau]$ に再び故障すれば，小修理が無料で実施される．$(\tau,T]$ に起こった故障に対しては，小修理が $c_2(>0)$ の費用で実施される．

一方，保証期間中 $(0,\tau]$ に一切故障しない場合，保証期間後 $(\tau,T]$ の故障に対しても c_2 の費用で小修理が実施される．

予防取り替え費用を $c_1(>0)$ とし，システムが最初の購入から年齢 $T(>\tau)$ になった時点で予防取り替えを行うものとする．この上で単位時間当たりの期待費用 $C(T)$ を最小にする予防取り替え年齢 $T=T^*$ を考える．

3. 期待費用

ここでは，年齢 T で予防取り替えを行うときの，単位時間当たり期待費用を定式化する．システムの故障時に小修理のみを実施するときに，時刻 t までの故障回数を $N(t)$ で表す．$N(t)$ は平均値関数 $H(t)$ の非同次ポアソン過程に従うと仮定する．

保証期間が終了する時刻 τ までの故障に対しては無料で小修理が実施されるため，有償で小修理を行う平均回数，すなわち $(\tau,T]$ での平均故障回数は

$$N_1=\int_0^{\tau}[H(T-x)-H(\tau-x)]h(x)e^{-H(x)}dx \quad (1)$$

となる．ここに，

$$h(t)=\frac{dH(t)}{dt} \quad (2)$$

である．

一方，$(0,\tau]$ で一切故障しない場合，$(\tau,T]$ での平均故障回数は

$$\begin{aligned} N_2 &= \int_{\tau}^{T}[1+H(T)-H(x)]h(x)e^{-H(x)}dx \\ &= [H(T)-H(\tau)]e^{-H(\tau)} \quad (3) \end{aligned}$$

となる．したがって，単位時間当たりの期待費用 $C(T)$ は次式となる [5],[6].

$$\begin{aligned} &C(T) \\ &= \frac{1}{T}\left\{c_1+c_2\left\{\int_0^{\tau}[H(T-x)-H(\tau-x)]dF(x)\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+[H(T)-H(\tau)]\overline{F}(\tau)\right\}\right\}, \qquad \tau\leq T \quad (4) \end{aligned}$$

ただし，

$$F(x) = 1-e^{-H(x)} \quad (5)$$

$$\overline{F}(x) = 1-F(x) \quad (6)$$

である．なお，式 (4) において $\tau=0$ とすると，従来の小修理のみのモデルに一致する．

4. 最適取り替え年齢

本章では，先に定式化した単位時間当たり期待費用を最小にするという意味での最適な予防取り替え年齢 $T = T^*$ に関する解析を行う．

保証期間終了と同時に予防取り替えを行うときの期待費用は

$$C(\tau) = \frac{c_1}{\tau} \tag{7}$$

となる．また，保証期間後の予防取り替えを行わず，小修理のみ実施する場合の期待費用は

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to+\infty} C(T) \\
&= c_2 \lim_{T\to+\infty} \left[\int_0^\tau h(T-x)dF(x) + h(T)\overline{F}(\tau)\right] \\
&= c_2 \lim_{T\to+\infty} h(T)
\end{aligned} \tag{8}$$

となる．

$C(T)$ を T に関して微分すると，$C'(T) \geq 0$ は

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau [Th(T-x) - H(T-x) + H(\tau - x)]dF(x) \\
&\quad + [Th(T) - H(T) + H(\tau)]\overline{F}(\tau) \geq \frac{c_1}{c_2}
\end{aligned} \tag{9}$$

に等価であることがわかる．不等式 (9) の左辺を $L(T)$ とおくと

$$\begin{aligned}
L(\tau) &= \tau \int_0^\tau h(\tau - x)dF(x) + \tau h(\tau)\overline{F}(\tau) \\
&= \tau \left[f(\tau) + \int_0^\tau h(\tau - x)dF(x)\right]
\end{aligned} \tag{10}$$

$$L'(T) = T\left[\int_0^\tau h'(T-x)dF(x) + h'(T)\overline{F}(\tau)\right] \tag{11}$$

である．ここに

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \tag{12}$$

である．

以上より，$C(T)$ を最小にする $T = T^*$ は以下の場合分けの下で議論される．ただし

$$h'(t) > 0 \tag{13}$$

$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = +\infty \tag{14}$$

を仮定する．

(1) $L(\tau) < c_1/c_2$.

このとき，$C(T)$ は減少から増加に唯一度だけ変化する．すなわち，有限の T^* が唯一存在し，

$$C(T^*) = c_2\left[\int_0^\tau h(T^* - x)dF(x) + h(T^*)\overline{F}(\tau)\right] \tag{15}$$

を最小にする $T = T^*$ が最適な予防取り替え年齢となる．

(2) $L(\tau) \geq c_1/c_2$.

このとき，$C(T)$ は単調増加関数である．したがって，$T^* = \tau$ である．これは，保証期間の終了と同時に予防取り替えを行うことが最適となることを意味している．なお，このときの期待費用は

$$C(T^*) = \frac{c_1}{\tau} \tag{16}$$

である．

5. 数値例

紙数の都合上，数値例は当日発表させて頂く．

参考文献

[1] Barlow, R.E. and Proschan, F. : *Mathematical Theory of Reliability,* Wiley, New York, (1965).

[2] Blischke, W.R. and Murthy, D.N.P. : *Warranty Cost Analysis,* Marcel Dekker, Inc., New York, (1994).

[3] Iskandar, B.P. and Sandoh, H. : An Opportunity-based Age Replacement Policy Considering Warranty, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, Vol. 6, No. 3, pp. 229-236 (1999).

[4] Iskandar, B. P., Klefsjö, B. and Sandoh, H. : An Opportunity-based Age Replacement Policy with Warranty Analyzed by using TTT-transforms, *International Journal of Reliability and Applications*, Vol. 1, No. 1 (2000), (in press).

[5] Ross, S.M. : *Applied Probability Models with Optimization Applications,* Holden-Day, San Francisco, (1970).

[6] Ross, S.M. : *Introduction to Probability Models, 6th edition,* Academic Press, New York, (1997).