非協力4人ゲームにおけるNash-Stackelberg均衡解とその計算方法

01403974　広島大学　＊西﨑 一郎　NISHIZAKI Ichiro
01202665　広島大学　坂和 正敏　SAKAWA Masatoshi
広島大学　藤田嘉宜　FUJITA Yoshinori

1. はじめに

本研究では，2人の上位意思決定者と，そのそれぞれに下位意思決定者が一人づつ存在する2レベルの4人ゲームにおいて，それぞれの意思決定者間には協力関係はなく，下位の意思決定者は上位の決定を十分認識した後，合理的に応答する階層的意思決定を行う非協力4人ゲームを考察する．とくに，非協力4人ゲームの特別な場合である4人行列ゲームを取り上げ，各プレイヤーの均衡戦略であるNash-Stackelberg均衡解を求めるための定式化を行うとともに，Kuhn-Tuckerの最適条件を適用し，遺伝的アルゴリズム(GA)を用いた均衡解の計算手法を提案する．

2. 定式化

プレイヤー1の純戦略を $\{1,\ldots,k\}$，プレイヤー2の純戦略を $\{1,\ldots,l\}$，プレイヤー3の純戦略を $\{1,\ldots,m\}$，プレイヤー4の純戦略を $\{1,\ldots,n\}$ とすれば，それぞれのプレイヤーの混合戦略は $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_k)^T$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_l)^T$，$\boldsymbol{u}=(u_1,\ldots,u_m)^T$，$\boldsymbol{v}=(v_1,\ldots,v_n)^T$ と表すことができる．ここで，T は転置を表す．図1に4人行列ゲームの構造を示す．

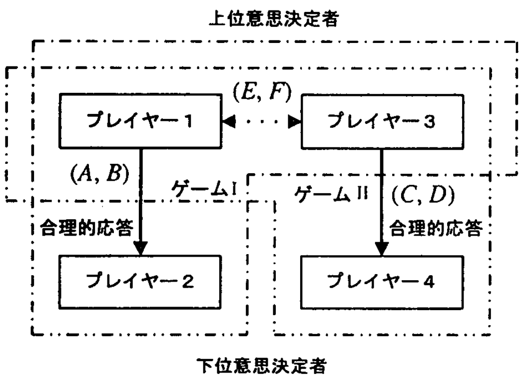

図 1: 4人行列ゲームの構造

図1において，ゲームIにおけるプレイヤー1とプレイヤー2の利得行列を A, B，ゲームIIにおけるプレイヤー3とプレイヤー4の利得行列を C, D，プレイヤー1とプレイヤー3の利得行列 E, F とする．このとき，非協力4人行列ゲームは，次のように定式化され，これらの問題の最適解をNash-Stackelberg均衡解と呼ぶ．

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{ゲーム I:} & \text{maximize } \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}^T E\boldsymbol{u} \\
& \text{subject to } \boldsymbol{e}_x^T\boldsymbol{x}-1=0 \\
& \qquad \boldsymbol{x}\geq \boldsymbol{0} \\
& \qquad \text{maximize } \boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{y} \\
& \qquad \text{subject to } \boldsymbol{e}_y^T\boldsymbol{y}-1=0 \\
& \qquad\qquad \boldsymbol{y}\geq \boldsymbol{0}
\end{array}\right\} \quad (1)
$$

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{ゲーム II:} & \text{maximize } \boldsymbol{u}^T C\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}^T F\boldsymbol{u} \\
& \text{subject to } \boldsymbol{e}_u^T\boldsymbol{u}-1=0 \\
& \qquad \boldsymbol{u}\geq \boldsymbol{0} \\
& \qquad \text{maximize } \boldsymbol{u}^T D\boldsymbol{v} \\
& \qquad \text{subject to } \boldsymbol{e}_v^T\boldsymbol{v}-1=0 \\
& \qquad\qquad \boldsymbol{v}\geq \boldsymbol{0}
\end{array}\right\} \quad (2)
$$

ここで，$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v$ はそれぞれすべての要素が1である k 次元，l 次元，m 次元，n 次元列ベクトルである．また，利得行列 A, B, C, D, E, F は，それぞれ $(k\times l)$, $(k\times l)$, $(m\times n)$, $(m\times n)$, $(k\times m)$, $(k\times m)$ 行列であり，全ての要素が非負とする．

3. 必要条件式

(1)と(2)の最大化問題にKuhn-Tucker条件を適用することで，Nash-Stackelberg均衡解の必要条件式を導出する．まず，(1)の下位レベルの最大化問題にKuhn-Tucker条件を適用すると，ゲームI (1)は，

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{maximize } \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}^T E\boldsymbol{u} \\
\text{subject to } \boldsymbol{e}_x^T\boldsymbol{x}-1=0 \\
\qquad \boldsymbol{x}\geq \boldsymbol{0} \\
\qquad B^T\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}_y\leq \boldsymbol{0} \\
\qquad \boldsymbol{e}_y^T\boldsymbol{y}-1=0 \\
\qquad \boldsymbol{y}\geq \boldsymbol{0}
\end{array}\right\} \quad (3)
$$

となる．さらに，もう一度，Kuhn-Tucker 条件を適用すると，ゲーム I に関して，必要条件式

$$\left.\begin{array}{l} -A\boldsymbol{y}-E^T\boldsymbol{u}+\lambda_1 e_x-\boldsymbol{\lambda}_2+B\boldsymbol{\lambda}_3+\lambda_5 B\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0} \\ -A^T\boldsymbol{x}+\lambda_4 e_y+\lambda_5 B^T\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\lambda}_6=\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{e}_x^T\boldsymbol{x}-1=0 \\ B^T\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}_y\leq\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{e}_y^T\boldsymbol{y}-1=0 \\ -\boldsymbol{\lambda}_2^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda}_3^T(B^T\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}_y)-\boldsymbol{\lambda}_6^T\boldsymbol{y}=0 \\ \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\lambda}_2\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\lambda}_3\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\lambda}_6\geq\boldsymbol{0} \end{array}\right\} \tag{4}$$

が得られる．ここで，λ_1, $\boldsymbol{\lambda}_2$, $\boldsymbol{\lambda}_3$, λ_4, λ_5, $\boldsymbol{\lambda}_6$ はラグランジュ乗数である．同様に，ゲーム II に関しても必要条件式

$$\left.\begin{array}{l} -C\boldsymbol{v}-F^T\boldsymbol{x}+\mu_1 e_u-\boldsymbol{\mu}_2+D\boldsymbol{\mu}_3+\mu_5 D\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0} \\ -C^T\boldsymbol{u}+\mu_4 e_v+\mu_5 D^T\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\mu}_6=\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{e}_u^T\boldsymbol{u}-1=0 \\ D^T\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}^T D\boldsymbol{v})\boldsymbol{e}_v\leq\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{e}_v^T\boldsymbol{v}-1=0 \\ -\boldsymbol{\mu}_2^T\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\mu}_3^T(D^T\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}^T D\boldsymbol{v})\boldsymbol{e}_v)-\boldsymbol{\mu}_6^T\boldsymbol{v}=0 \\ \boldsymbol{u}\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\mu}_2\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\mu}_3\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\mu}_6\geq\boldsymbol{0} \end{array}\right\} \tag{5}$$

が得られる．ここで，μ_1, $\boldsymbol{\mu}_2$, $\boldsymbol{\mu}_3$, μ_4, μ_5, $\boldsymbol{\mu}_6$ はラグランジュ乗数である．

したがって，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ が非協力 4 人行列ゲームの Nash-Stackelberg 均衡解であるための必要条件は，(4) と (5) を同時に満たすことである．しかし，ゲーム I を単一レベル問題に置き換えた最大化問題 (3) は凸計画問題ではないため，得られた条件式 (4) と (5) は，十分条件とはならない．このため，Nash-Stackelberg 均衡解を求めるには，まず，必要条件を満たす $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ を求め，それが均衡条件を満たすことを確かめなければならない．本研究では，Nash-Stackelberg 均衡解を求める手法として，次に述べる GA を適用する．

4. 遺伝的アルゴリズム (GA)

GA における適合度関数を定義するために，次のような 2 段階の評価を行う．まず，与えられた個体 $\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ において，必要条件式 (4) と (5) に，非負の人為変数 $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2$, z_3, $\boldsymbol{z}_4$, $\boldsymbol{z}_5$, z_6 を導入し，次の最小化線形計画問題を定式化する．

$$\left.\begin{array}{rl} \text{minimize} & w=\boldsymbol{z}_1^T\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{z}_2^T\boldsymbol{e}_y+z_3+\boldsymbol{z}_4^T\boldsymbol{e}_u \\ & \qquad +\boldsymbol{z}_5^T\boldsymbol{e}_v+z_6 \\ \text{subject to} & -A\boldsymbol{y}-E^T\boldsymbol{u}+\lambda_1\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{\lambda}_2+B\boldsymbol{\lambda}_3 \\ & \qquad +\lambda_5 B\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{0} \\ & -A^T\boldsymbol{x}+\lambda_4\boldsymbol{e}_y+\lambda_5 B^T\boldsymbol{x} \\ & \qquad -\boldsymbol{\lambda}_6+\boldsymbol{z}_2=\boldsymbol{0} \\ & -\boldsymbol{\lambda}_2^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda}_3^T(B^T\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}_y) \\ & \qquad -\boldsymbol{\lambda}_6^T\boldsymbol{y}+z_3=0 \\ & -C\boldsymbol{v}-F^T\boldsymbol{x}+\mu_1\boldsymbol{e}_u-\boldsymbol{\mu}_2+D\boldsymbol{\mu}_3 \\ & \qquad +\mu_5 D\boldsymbol{v}+\boldsymbol{z}_4=\boldsymbol{0} \\ & -C^T\boldsymbol{u}+\mu_4\boldsymbol{e}_v+\mu_5 D^T\boldsymbol{u} \\ & \qquad -\boldsymbol{\mu}_6+\boldsymbol{z}_5=\boldsymbol{0} \\ & -\boldsymbol{\mu}_2^T\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\mu}_3^T(D^T\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}^T D\boldsymbol{v})\boldsymbol{e}_v) \\ & \qquad -\boldsymbol{\mu}_6^T\boldsymbol{v}+z_6=0 \\ & \boldsymbol{\lambda}_2,\boldsymbol{\lambda}_3,\boldsymbol{\lambda}_6,\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\mu}_3,\boldsymbol{\mu}_6\geq\boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,z_3,\boldsymbol{z}_4,\boldsymbol{z}_5,z_6\geq\boldsymbol{0} \end{array}\right\} \tag{6}$$

最小化問題 (6) は $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ をパラメータとして固定すれば，線形計画問題となる．問題 (6) の目的関数値 w が 0 になれば，個体 $\boldsymbol{S}$ は必要条件式 (4) と (5) を満足することになる．

さらに，均衡解の十分性を判定するために，問題 (6) での目的関数値 w が 0 の個体 $\boldsymbol{S}^*=(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)$ に対して，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ とした問題 (3) を解き，最適解が $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ となり，同様にゲーム II に対応する問題の最適解が $(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)$ となれば，個体 $\boldsymbol{S}^*$ は Nash-Stackelberg 均衡解となる．問題 (3) を解くことに関しても同様に GA を適用して

$$w_1=\max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}^T E\boldsymbol{u}^*)-(\boldsymbol{x}^{*T}A\boldsymbol{y}^*+\boldsymbol{x}^{*T}E\boldsymbol{u}^*) \tag{7}$$

$$w_2=\max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u}^T C\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}^{*T}F\boldsymbol{u})-(\boldsymbol{u}^{*T}C\boldsymbol{v}^*+\boldsymbol{x}^{*T}F\boldsymbol{u}^*) \tag{8}$$

を計算する．問題 (6) における目的関数値 w と，(7) で得られるゲーム I における最大値との差 w_1 と，(8) で得られる ゲーム II における最大値との差 w_2 を求め，w, w_1, w_2 を個体 $\boldsymbol{S}$ の適合度関数に用いる．w, w_1, w_2 の値が小さい程よい個体なので，個体 $\boldsymbol{S}$ の適合度関数 $f(S)$ を次のように定義する．

$$f(\boldsymbol{S})=\begin{cases} 1/(w_1+w_2+1), & w=0 \\ 1/(100(w+1)), & w\neq 0 \end{cases} \tag{9}$$

さらに，スケーリングとシェアリングを導入することによって，均衡解を探索する．