期間ごとに分割可能な多期間資産選択モデル

01206492 東北大学 鈴木 賢一 SUZUKI Kenichi

1. はじめに

多期間の資産選択問題の解法は、i) 連続モデルを仮定して、確率制御型の手法を適用するものと、ii) 離散的なモデルを仮定して、等価な確定的大規模数理計画問題に帰着させるもの、がよく知られている。前者は一般的な制約のもとで解を求めるのが困難であるため、実務的には後者の方法がよく用いられている。後者は制約を柔軟に記述できる利点がある一方、分岐の数と取引期間が増加するにつれ考慮すべき状態数が爆発的に増加するため計算量の制約が大きい。

本研究では、取引期間が増えても状態数が指数的に増加しないような解法の枠組みを提示する。また、多期間問題で重視される取引コストについても、近似的にとりあつかう手法を提案する。

2. 問題の設定とモデル

以下のような状況を仮定する。

- 市場には n 個の資産が存在する。
- 投資家は T 期間にわたって取引を行い、期末の総資産価値を適当な基準にしたがって評価する。
- 評価関数は凸関数。
- 各時点ごとに線型な取引制約が存在する。これらは資産価値の履歴に依存しない投資比率に関する制約である。
- 各期の総資産価値は負にはならない。
- 資産の収益率は各期ごとに独立な分布に従う。また、分布の台は有界であるとする。

以下の記法を用いる。

W_t : 時点 t における投資家のポートフォリオの価値
v_{jt} : 時点 t における資産 j への投資額
　$(j=1,\dots,n; t=0,\dots,T-1)$
R_{jt} : 時点 t における資産 j への収益率
　$(j=1,\dots,n; t=1,\dots,T)$
w_0 : 初期時点の保有資金量 (>0)
$f(\cdot)$: 評価関数
A_t : 時点 t における制約行列 $(t=0,\dots,T-1)$
b_t : 時点 t における右辺ベクトル $(t=0,\dots,T-1)$
$v_t=(v_{1t},\dots,v_{nt})'$
$R_t=(R_{1t},\dots,R_{nt})'$
$e=(1,1,\dots,1)$

時点 t における取引には、予算制約以外にも制約が存在するものとしている。この問題で制御変数となるのは各資産への投資額 v_{jt} であるにもかかわらず、投資比率の制約を仮定したのは、制約が資産価値の履歴に依存しない場合、投資額に対しては意味のある制約をおくのが困難だからである。

時点 t における投資比率を x_t としたとき、投資比率制約は $A_t x_t \le b_t$ と記述される。一方、$x_{jt}=v_{jt}/W_t$ であるので、これを投資額に対する制約に置き換えることができる。総資産価値 W_t は非負であることを仮定しているので、不等式制約であっても混乱は生じない。ただし、W_t に非負条件を付けたため、分布の台が有界でなければならない。

以上より、解くべき問題は以下のように与えられる。

$$\begin{array}{lll} \min & \mathrm{E}[f(W_T)] & \\ \text{s.t.} & W_{t+1}=R'_{t+1}v_t, & t=0,\dots,T-1 \\ & e'v_t=W_t, & t=0,\dots,T-1 \\ & A_t v_t \le W_t b_t, & t=0,\dots,T-1 \\ & W_{t+1}\ge 0, & t=0,\dots,T-1 \\ & W_0=w_0 & \end{array} \qquad (1)$$

3. 解法の枠組

以下のように子問題を定義する。

$$J_{T-1}(w) = \min\{\mathrm{E}[f(R'_T v_{T-1})] \mid v_{T-1}\in S_{T-1}(w)\} \qquad (2)$$

$$J_t(w) = \min\{\mathrm{E}[J_{t+1}(R'_{t+1}v_t)] \mid v_t\in S_t(w)\} \qquad (3)$$
$$t=0,\dots,T-2$$

ただし、

$$S_t(w)=\{v \mid e'v=w,\quad A_t v\le wb_t,\quad R'_{t+1}v\ge 0\},\quad t=0,\dots,T-1 \qquad (4)$$

仮定より、$f(\cdot)$ が凸関数なので、$J_{T-1}(w)$ も w にかんして凸関数となる。順次、$J_t(w)$ が凸関数であれば、

$J_{t-1}(w)$ も凸関数となることが示される。J_{T-1} を求めてから、後退計算をすることにより、初期時点での投資額が確定する。

実際の計算にあたっては、$J_t(w)$ を求めてやらねばならないが、子問題は線型制約上の凸関数最小化問題として定義されているので、w にかんしてパラメトリックに解けばよい。実際の $J_t(w)$ は区分的な凸関数であり、子問題の規模が大きくなれば、区分点は増大してしまう。また、各区間を構成する凸関数を厳密に求めるのは手間がかかるので、区分点を適当に間引きした区分的線型関数で表現するのがよいだろう。

この手法は解くべき問題の数が高々T 個のパラメトリック凸計画問題だけである。かく子問題は基本的に一期間の問題として定義されるので、多少資産数が増加しても影響は少ない。また評価関数の形状にもよるが、収益率が連続的な分布であっても適用可能である。このことから、T や n が大きくなっても問題の規模が爆発的に増加することがない。

なお、もとの問題がこの形式のように子問題に分割することができるのは、収益率の分布が独立であることを仮定したことが重要である。収益率が履歴に依存する場合は、履歴の数だけ子問題を考慮しなければならず、この方法のメリットは失われる。

4. 取引費用を考慮した解の改善

多期間の問題では、資産の組み替えにより発生する取引費用を考慮する必要がある。残念ながら本研究の枠組みでは、直接取引費用を含めた最適化を行うことはできない。なぜなら、最適取引戦略が各時点における総資産価値 W_t のみに依存するとしているからである。もし、取引費用制約を導入すると、状態空間が W_t のみならず v_t についてもとらねばならず、現実には扱いがたい。

そこで、以下では解の改善について近似的なアプローチを提案する。

(1) 資産価値への影響のみを考慮するモデル

取引によって発生する費用は収益率の実現値に依存しているので、あらかじめ確定的に決めることはできない。しかし、ここでは単純に、前もって資産の総価値から一定の割合に応じて取引費用のための資金を用意しておくものとする。

$c_0, c_1, \ldots, c_{T-1}$ を各時点における取引費用のために拠出する資金の割合として事前に定め、(2)(3) の w を $(1-c_t)w$ で置き換えて前節のように問題を解けばよい。

(2) 投資額の制約への影響を考慮するモデル

W_{t-1} の実現値 $\bar{w}$ が与えられたときそれを達成しやすい W_{t-2} の実現値をの範囲を考えることはできるだろう。それが区間 $K_{t-2}(\bar{w}) = \{\xi \mid l_{t-2} \leq \xi \leq u_{t-2}\}$ であったとする。参照ポートフォリオの集合 $V(K_t)$ を次のように定義する。

$$V(K_t(\bar{w})) = \{v \mid v = \arg\min J_t(w), \quad w \in K_t(\bar{w})\} \tag{5}$$

さらに、すべての参照ポートフォリオから、取引コスト $c_t\bar{w}$ で実現可能なポートフォリオの集合を

$$\bar{S}_t(\bar{w}) = \cap_{u \in V(K_{t-1}(\bar{w}))}\{v \mid \sum_{j=1}^{n} \gamma |v_j - u_j| \leq c_t\bar{w}\} \tag{6}$$

で定義する (γ は 1 単位額あたりの取引コスト)。

$\bar{S}_t(\bar{w})$ が W_t の実現値で定まることに着目すると、取引費用を考量した解は、以下のようにして求めることができる。

1. 事前に、取引コストをまかなう資金の比率 c_t $(t = 0, \ldots, T-1)$ を事前に定める。
2. $w' = (1 - c_{t-1})w$ とおいて、以下の子問題をバックワードに解く。

$$\begin{aligned} &J_{t-1}(w) \\ &\quad = \min\{\mathrm{E}[J_t(R'_t v_{t-1})] \mid v_{t-1} \in S_{t-1}(w') \cap \bar{S}_{t-1}(w')\} \end{aligned} \tag{7}$$

5. 数値実験

発表当日に数値実験の結果を報告する。

参考文献

[1] D. R. Cariño and W. T. Ziemba. Formulation of the russel–yasuda kasai financial planning model. *Operations Research*, 46:433–449, 1998.

[2] Martin Schweizer. Variance-optimal hedging in discrete time. *Mathematics of Operations Research*, 20(1):1 — 32, 1995.