最小拘束問題の下界値算法

02103380　防衛大学校情報工学科　*加治屋 政誉司　KAJIYA Masayoshi
01107880　防衛大学校情報工学科　片岡　靖詞　KATAOKA Seiji

1　はじめに

教官 m 人，学生 n 人を考える．各学生には複数の指導教官がおり，その対応は，図1のような0-1行列で表現できる．卒論発表会において，各教官は，最初の担当学生の発表開始から最後の担当学生の発表終了まで拘束される．このとき，学生の発表順序をスケジュール（列の入れ換え）をすることにより（図2），教官の拘束時間の総和を最小化する問題を**最小拘束問題**（Minimum Binding Problem: MBP）と呼ぶことにする．

時限	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	拘束
学生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	時間
1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	9
教 2	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	10
官 3	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	10
4	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	8

図 1: スケジュール前・総拘束時間 37

時限	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	拘束
学生	2	4	7	10	1	3	6	9	5	8	時間
1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	6
教 2	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	5
官 3	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	8
4	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	7

図 2: 最適スケジュール後・総拘束時間 26

本研究では，拘束開始時刻を最遅化する問題を考え，それを用いてMBPの下界値が得られることを示す．さらに最適解の諸性質をもとに最遅拘束開始問題を解くDPアルゴリズムを提案し，他に考えられている下界値 [3] との比較を行い，提案する手法の優越性を示す．

2　これまでの研究と4教官緩和

前回の発表 [2] では，MBPの動的計画法による最適解法を示した．このとき，最適解において同一パターンの列はひとまとめにできるという性質を利用し，教官数が4までであれば，学生数が十分多くなっても楽に最適解が求められることを示した．この結果より，片岡ら [3] の提案した3教官緩和による下界値を拡張し，**4教官緩和**を提案することができる．4教官緩和は，教官を4人ずつのブロックに分割し，それぞれにおいてMBPを最適に解いた最適値の総和をとるものである．この緩和は簡単に求められるだけでなく，平均的には線形緩和よりもよいことが報告されている [3].

3　最遅拘束開始問題による下界値

ここでは，教官の拘束開始時刻のみに注目し，それが最も遅くなるような**最遅拘束開始問題**（Latest-Start Binding Problem: LSBP）を考える．同様に拘束終了時刻が最も早くなるような最早拘束終了問題（Fastest-Finish BP: FFBP）も考えることができる．LSBP（FFBP）の目的関数は拘束が始まる前（終了した後）の0の数の最大化とし，その最適値を $LS(FF)$ とする．LS と FF は同じ値になることに注意する．このとき，各々の問題は最も遅い拘束開始と最も早い拘束終了を独立に考えているので，明らかに

$$LBLS = mn - (LS + FF) = mn - 2LS$$

はMBPの下界値を与える．

3.1　最遅拘束開始問題の最適解の諸性質

LSBPも $\mathcal{NP}$-困難であることが，MBPの $\mathcal{NP}$-困難性の証明 [2] と同様の考え方で示すことができる．しかしながら，LSBPの最適解が持つ性質を利用すれば，効率よく最適解を得る方法を提案できる．

LSBPでは，ある解をもとに教官を拘束開始順に入れ換えても一般性を失うことはなく，その結果，図3のように問題の0-1行列を拘束開始時刻を境にブロック対角化することができる．このとき，LSBPの最適解には，次の性質が成り立つ．

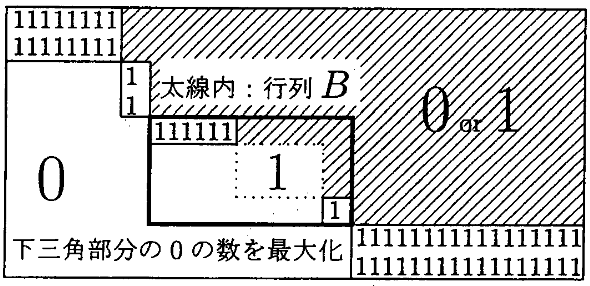

図 3: 教官を拘束開始順に並べる

性質 1: ブロック対角成分の要素はすべて1である．

仮にブロック内に0が入っていたら，該当する列をブロックの先頭に移動することにより，LSBP

の解を改善できるので，性質 1 は明らかに成り立つ．このことは，LSBP が最適な順序に学生を並べる問題ではなく，**教官を並べる問題に帰着**できることを示している．一般的に学生数 n に比べて教官数 m の方が十分少ない場合を想定 ($m \ll n$) しているので，このことは規模の大きな問題にも適用できる可能性を与えている．

また，任意の連続するブロック対角成分から誘導される部分 0-1 行列（図 3 の太線枠内: 行列 B と呼ぶことにする）に注目すると，LSBP の最適解においては，次の性質 2 が成立する．

性質 2: 行列 B 内においても LSBP の最適解である． この性質は逆も成立する．仮に図 3 の太線内のみの LSBP を考えて，この部分で最適でなければ，全体の LSBP としてもさらによい解が存在することで，性質 2 の正当性は示される．この性質 2 に基づいて，次節で説明するような **LSBP の DP 解法**を提案することが可能になる．

3.2 アルゴリズムと下解値の強化

LSBP のアルゴリズムは，次のように拘束開始の遅い順に教官を定めながら進める．集合 T を教官の部分集合，$f(T)$ を教官集合 T における LSBP の最適値とする．このとき，次の漸化式が成り立つ．

$$f(T) = \max_{t \in T}\{f(T \setminus \{t\})\} + \left[\begin{array}{l}\text{教官集合 } T \text{ に関して} \\ \text{すべて 0 の列の数}\end{array}\right]$$

初期値として，$f(\emptyset) = 0$ とすればよい．上記漸化式右辺第 2 項は，各 T によって定数になるのでプログラム化も簡単であり，この DP アルゴリズムを用いれば，教官数 15 くらいであれば，学生数にほとんど依存せず，ほぼ一瞬にして最適値を求めることができる．

また，MBP の解は順序を逆にしても変わらないので，特定の列に注目し，それが必ず前半に入るような問題と，後半に入るような問題を考えることにより，さらに強化した下解値（$LBFL$）を得ることができる．

4 下界値の比較実験

計算機実験では，提案した 4 教官緩和による下界値（$LB4T$），あまり大きな問題は扱えないが参考までに 5 教官緩和による下界値（$LB5T$），最遅拘束開始問題を利用した下界値（$LBLT$），特定の列を前・後半に固定して求めた下界値（$LBFL$）のそれぞれの値を，問題の行列における 1 の割合が疎・中・密に分けて行った．MBP の DP 解法で最適値を求めて比較できる程度にするために，教官数 ($m =$)10，学生数 ($n =$)20 とした．表 1 の各数値は，10 回の実験を行った目的関数値の平均である．また，(　) 内は，最適値を 100 とした下界値の割合を示している．CPU 時間はこの程度の大きさであれば問題にならないほど高速である．

表 1: 下界値の比較

緩和	疎 (0.25)	中 (0.50)	密 (0.75)
$LB4T$	62.4(72.1)	112.6(72.3)	158.9(91.3)
$LB5T$	69.6(80.5)	123.5(87.0)	164.3(94.4)
$LBLS$	46.6(53.9)	126.8(82.3)	167.8(96.4)
$LBFL$	50.3(58.2)	129.6(91.3)	169.4(97.4)
Opt.	86.5(100.0)	142.0(100.0)	174.0(100.0)

この結果より，問題の行列中の 1 の割合が疎である問題を除いては，最遅拘束開始緩和が有効であることが示された．下界値としての評価も，特定の列を前半または後半に固定することにより，密の問題であれば，かなりよいものが得られることも分った．

また，この結果からは読み取ることができないが，最遅拘束開始問題の DP 解法は学生数 n に依存していないので，$LBLS$ の求め方から学生数が大きくなると，下界値の効率も相対的によくなることが予想される．

5 分枝限定法の適用と今後の見通し

行列の連続する 1 の性質 (consecutive ones property) は PQ-tree アルゴリズム [1] を用いれば，列数の線形オーダーで判断できる．したがって，もし適切に拘束中の 0 を 1 に置換できれば，その判断は簡単であるが，現状の上下界値では，いくつの 0 を 1 にすべきか，どの 0 を 1 にすべきかは組合せ的になり，すぐには現実的な解法に結びつかない．

MBP では，逆順や一部の列の順列が許される場合があるので，全順列を意識した分枝限定法では無駄な列挙が非常に多くなる．しかし，最遅拘束開始緩和を用いれば，ある列が前半・後半にあるかに場合分けすれば，無駄が少なく分枝限定法を構築する見通しがつく．さらに無駄な列挙を抑えるためには，分枝することにより，最適解を示す PQ-tree が一意に決められるような手法の研究が大きな課題として残されている．

参考文献

[1] K.S.Booth: Consecutive ones property — using *PQ*-tree. *J.Comp. and Sys. Sci.* 13(1976)335-379.
[2] 加治屋他: MBP の DP 解法. OR 学会 2000 春,26-27.
[3] 片岡他: 最小滞在時間 —. OR 学会 1996 春,58-61.