2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

可能性測度に対する確率制約条件をもつファジィランダム線形計画問題

02102914 広島大学工学部 *片桐 英樹 KATAGIRI Hideki
02102665 広島大学工学部 坂和 正敏 SAKAWA Masatoshi
01005194 大阪大学大学院工学研究科 石井 博昭 ISHII Hiroaki

1 はじめに

現実の意思決定においては，確率的な不確実性と人間の知識などに含まれるあいまい性とが同時に存在する場合も多い．そのような要素を表す有用な概念としてファジィランダム変数 [1] があり，応用として，ファジィランダム変数を係数に含む線形計画問題などが考えられている．これまでに考えられている意思決定モデルの一つとして，可能性測度に関する機会制約条件計画問題 [2] があるが，本研究では，可能性だけでなく確率レベルも同時に最適化する問題を扱い，確率計画法における一般化 P モデル [3] に対応するモデルを考える．本稿では，まず問題の定式化を行い，それを等価確定問題に変換した後，問題を効率的に解くアルゴリズムを構築する．

2 定式化

次の線形計画問題を考える．

$$\left.\begin{array}{ll}\min & \tilde{\boldsymbol{c}}(\omega)\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}\end{array}\right\} \tag{1}$$

ただし，$\tilde{\boldsymbol{c}}(\omega) = (\tilde{c}_1(\omega), \ldots, \tilde{c}_n(\omega))$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$, $A = (a_{ij})$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)^t$ とし，$\tilde{c}_j(\omega)$, $j = 1, \ldots, n$ は次に表されるファジィランダム変数とする．

$$\mu_{\tilde{C}_j(\omega)}(t) = \max\left\{1 - \frac{|t - d_j(\omega)|}{\alpha_j},\ 0\right\}$$

ここで，$d_j(\omega)$, $j = 1, \ldots, n$ は平均 m_j, $j = 1, \ldots, n$, 分散共分散行列 V をもつ多次元正規分布に従う確率変数とする．このとき，Zadeh の拡張原理により目的関数は次のメンバシップ関数に特性付けられるファジィランダム変数 $\tilde{Y}(\omega)$ となる．

$$\mu_{\tilde{Y}(\omega)}(y) = \max\left\{1 - \frac{|y - \sum_{j=1}^n d_j(\omega)x_j|}{\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j},\ 0\right\} \tag{2}$$

目的関数値に対して「だいたい f 以下にしたい」というファジィ目標を導入し，次の区分的に線形なメンバシップ関数で特性付けられるファジィ集合 $\tilde{G}$ で表す．

$$\mu_{\tilde{G}}(y) = \begin{cases} 1, & y \leqq f_1 \\ \dfrac{f_0 - f}{f_0 - f_1}, & f_1 \leqq y \leqq f_0 \\ 0, & y \geqq f_0 \end{cases} \tag{3}$$

ここで，制約式を満たす可能性の度合いとして次の可能性測度を定義する．

$$\Pi_{\tilde{Y}(\omega)}(G) = \min_y \left\{\mu_{\tilde{Y}(\omega)}(y),\ \mu_{\tilde{G}}(y)\right\} \tag{4}$$

問題 (1) の意思決定法として，確率計画法における機会制約条件計画に基づき，次の問題を考える．

$$\left.\begin{array}{ll}\max & h + w\theta \\ \text{s.t.} & Pr(\Pi_{\tilde{Y}(\omega)}(G) \geqq h) \geqq \theta \\ & A\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0},\ 1/2 < \theta \leqq 1\end{array}\right\} \tag{5}$$

ここで，$Pr(\cdot)$ は確率測度を表し，ω は可能性測度と確率測度の間の重み係数とする．このモデルは，確率計画問題における一般化 P モデル [3] の拡張であり，可能性だけでなく，確率レベルも同時に最適化する問題になっている．問題 (5) は次の等価確定問題に変形される．

$$\left.\begin{array}{ll}\max & \dfrac{\sum_{j=1}^n (m_j - f_0\alpha_j)x_j - q\sqrt{\boldsymbol{x}^t V \boldsymbol{x}}}{\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j + f_0 - f_1} + wF(q) \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0},\ q > 0\end{array}\right\} \tag{6}$$

ただし，F は標準正規分布の分布関数であり，$1/2 < \theta \leqq 1$ とすると，$q > 0$ となる．各々の $q > 0$ に対する問題 (6) の最適解および最適値をそれぞれ $\boldsymbol{x}(q)$, $g(q)$ とする．問題 (6) を解くために次の部分問題を導入する．

$$\left.\begin{array}{ll}\max & \dfrac{\sum_{j=1}^n (m_j - f_0\alpha_j)x_j - q\sqrt{\boldsymbol{x}^t V \boldsymbol{x}}}{\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j + f_0 - f_1} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}\end{array}\right\} \tag{7}$$

この問題に対して，$y_j = x_j/(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j + f_0 - f_1)$, $j = 1,\ldots,n$, $\eta = 1/(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j + f_0 - f_1)$ として変換すると，次の問題と等価となる．

$$\left.\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^{n}(m_j - f_0\alpha_j)y_j - q\sqrt{\boldsymbol{y}^t V \boldsymbol{y}} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{y} \leqq \eta \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0},\ \eta > 0 \\ & \sum_{j=1}^{n}\alpha_j y_j + \eta(f_0 - f_1) = 1 \end{array}\right\} \quad (8)$$

問題 (8) は $q > 0$ に対して凸計画問題となっている．

以下では，Ishii らの方法 [3] を応用したアルゴリズムを構築する．まず，次の補助問題を導入する．

$$\left.\begin{array}{ll} \max & \dfrac{R}{q}\sum_{j=1}^{n}(m_j - f_0\alpha_j)y_j - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{y}^t V \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{y} \leqq \eta \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0},\ \eta > 0 \\ & \sum_{j=1}^{n}\alpha_j y_j + \eta(f_0 - f_1) = 1 \end{array}\right\} \quad (9)$$

問題 (9) の最適解を $\boldsymbol{y}^R(q)$ とすると，問題 (9) において $\sqrt{\boldsymbol{y}^R(q)^t V \boldsymbol{y}^R(q)} = R$ を満たすとき，$\boldsymbol{y}^R(q)$ は問題 (8) の最適解に一致する．また，問題 (9) の最適解は次の形に表すことができる [3].

$$\boldsymbol{y}^R(q) = \frac{R}{q}\boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{t}_B \quad \left(L_B \leqq \frac{R}{q} \leqq U_B\right) \qquad (10)$$

ここで，$\boldsymbol{r}_B, \boldsymbol{t}_B$ は基底行列 B に依存して定まるベクトルであり，L_B, U_B は $\boldsymbol{y}^R(q)$ が式 (10) の形で表されるための R/q の下限および上限である．さらに同じ基底行列をもつ q の集合は連続な区間を形成することが示されており，その区間を $I(B)$ と表す．

次にアルゴリズムにおいて用いる記号の定義を行う．現在探索している q を q_c とし，既に探索された q の領域を S_N とする．$I(B)$ において最小の q を q_M とし，$g(q)$ を最小にする q を q_m とする．さらに $(\tilde{x}, \tilde{q})$, $\tilde{v}$ をそれぞれ探索した時点での準最適解および準最適値とする．また，最適性を判定するための関数 $T(q)$ を次のように定義する．

$$T(q) \triangleq \sqrt{\log\frac{w^2(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j + f_0 - f_1)}{2\pi \boldsymbol{x}(q)^t V \boldsymbol{x}(q)}} \qquad (11)$$

問題 (6) を解くアルゴリズムの概要は次のようになる．

手順 1: $q_c \leftarrow q_u$ (q の上限) とし手順 2 へ進む．

手順 2: 問題 (9) を用いて，問題 (8) を解く．さらにそのときの基底行列 B_{q_c}，部分問題の最適解 $\boldsymbol{x}(q_c)$ および $I(B_c)$ を求め，$I(B_{q_c})$ における $g(q)$ を決定する．

手順 3: q_m を計算し，$T(q_m) = q_m$ ならば，手順 5 へ進む．そうでなければ，手順 4 へ進む．

手順 4: $S_N \cup I(B_{q_c}) \supseteq (0, +\infty)$ ならば手順 6 へ進む．そうでなければ，$S_N \leftarrow S_N \cup I(B_{q_c})$ とする．$T(q_M) < q_M$ ならば，$q_c \leftarrow T(q_M)$，$S_N \leftarrow S_N \cup (T(q_M), q_M)$ として，手順 2 へ戻る．そうでなければ，$q_c \leftarrow q_M - \varepsilon$ (ε は十分小さい正数) として手順 3 へ戻る．

手順 5: $g(q_m) > \tilde{v}$ ならば，$\tilde{v} \leftarrow g(q_m)$，$\tilde{x} \leftarrow \boldsymbol{x}(q_m)$，$\tilde{q} \leftarrow q_m$ として手順 4 へ戻る．$g(q_m) \leqq \tilde{v}$ の場合はそのまま手順 4 へ戻る．

手順 6: 現在の $(\tilde{x}, \tilde{q})$ を元の問題の最適解，また $\tilde{v}$ を最適値として終了する．

3 おわりに

本研究では，ファジィランダム変数を係数に含む線形計画問題において，可能性測度に関する機会制約条件計画問題を扱い，可能性測度と確率測度を同時に最適化する問題として定式化を行った．まず元の問題を等価確定問題に変換し，次にパラメータを含む補助問題を用いることによって問題を効率的に解くアルゴリズムを構築した．

本研究では，可能性測度に対する確率制約条件を考えたが，必然性測度についてのモデルも同様に扱うことができる．本問題は可能性測度と確率測度の 2 目的問題であるため，今後の課題としては多目的計画問題における対話型満足化手法 [4] に基づくモデルを提案することなどが挙げられる．

参考文献

[1] M.L. Puri, D.A. Ralescu, Fuzzy random variables, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **114** (1986) 409-422.

[2] 片桐英樹，不確実・不確定状況下での数理的意思決定法の基礎的研究，(大阪大学工学部博士論文，1999).

[3] H. Ishii, T. Nishida, Y. Nanbu, Generalized chance constrained constraint programming problem, *Journal of the Operations Research Society of Japan* **21**, No. 1 (1978) 124-146.

[4] 坂和正敏，経営数理システムの基礎，(森北出版，1991).