

Farkas の補題と双対定理の初等的証明

01605000 東京大学 松井 知己 MATSUI Tomomi

01404420 東邦大学 * 並木 誠 NAMIKI Makoto

多くの線形計画法の本では、強双対定理の証明は、単体法の正当性から導かれている事が多い。しかしながら、単体法の有限性の証明や、2段階単体法の詳細は決して簡単なものではない。また非線形計画のKKT条件の特殊形として示そうとしても、適用できる簡単な制約想定が無い場合、その証明は安易ではない。そもそも最適解があるかという問題についても、許容領域のコンパクト性が保証されず、決して自明ではない。

実は強双対定理の証明は、許容解の存在性、つまり線形不等式系の解の存在性の特長付けと本質的な関わりがある。線形不等式系の解の存在性については、以下のFarkasの補題と呼ばれるものが成り立つ。

集合 S と集合 $\{j\}$ に対し、 $S \cup \{j\}$ を $S + j$ と書く。また $j \in S$ の時、 $S \setminus \{j\}$ を $S - j$ と書く。集合 S, I, J, K が $I \cap J = J \cap K = K \cap I = \emptyset$ と $S = I \cup J \cup K$ を満たすとき、 I, J, K は S の分割であると言う。本稿では、通常知られているFarkasの補題より一般的な形式の以下の主張を証明する。

Farkas の補題 (一般形): 任意の $m \times n$ 行列 A と、任意の m 次元ベクトル b に対し、以下が成り立つ。行列 A の列の添え字集合を $N = \{1, 2, \dots, n\}$ とし、 A_i を A の第 i 列ベクトルとする。 N の分割 I, J, K に対し、 $X(I, J, K), Y(I, J, K)$ を以下のように定義する。

$$X(I, J, K) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \left. \begin{array}{l} Ax = b, \\ x_i \geq 0 \quad (i \in I), \\ x_i \text{ は自由} \quad (i \in J), \\ x_i = 0 \quad (i \in K) \end{array} \right\}, \right.$$

$$Y(I, J, K) = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \left. \begin{array}{l} y^T A_i \geq 0 \quad (i \in I), \\ y^T A_i = 0 \quad (i \in J), \\ y^T A_i \text{ は自由} \quad (i \in K), \\ y^T b < 0 \end{array} \right\} \right.$$

N の任意の分割 I, J, K に対し、 $X(I, J, K)$ と $Y(I, J, K)$ のうち丁度1つが要素をもつ。

証明: $\bar{x} \in X(I, J, K)$ かつ $\bar{y} \in Y(I, J, K)$ とすると、

$$0 > \bar{y}^T b = \bar{y}^T A \bar{x} \\ = \sum_{i \in I} \bar{y}^T A_i \bar{x}_i + \sum_{i \in J} \bar{y}^T A_i \bar{x}_i + \sum_{i \in K} \bar{y}^T A_i \bar{x}_i \\ = \sum_{i \in I} \bar{y}^T A_i \bar{x}_i + 0 + 0 \geq 0$$

となり矛盾。ゆえに $X(I, J, K)$ と $Y(I, J, K)$ が同時に解を持つことは無い。以下では $X(I, J, K)$ と $Y(I, J, K)$ の一方が要素を持つ事を、 I の要素数に関する帰納法を用いて示す。

(1) $|I| = 0$ の場合。補題1において証明する。

(2) 正整数 k に関して、 $|I| < k$ ならば補題の主張が成り立つと仮定して、 $|I| = k$ の場合を示す。

I 中の要素を1つ選び l とする。以下では6つの集合

$$X(I, J, K), X(I-l, J+l, K), X(I-l, J, K+l),$$

$$Y(I, J, K), Y(I-l, J+l, K), Y(I-l, J, K+l),$$

について議論する。これらの集合の定義中の制約を表1に倣ってまとめると、次のようになる。

表2. 制約の一覧表.

添え字	$I-l$	l	J	K
$X(I, J, K)$	非負	非負	自由	ゼロ
$X(I-l, J+l, K)$	非負	自由	自由	ゼロ
$X(I-l, J, K+l)$	非負	ゼロ	自由	ゼロ
$Y(I, J, K)$	非負	非負	ゼロ	自由
$Y(I-l, J+l, K)$	非負	ゼロ	ゼロ	自由
$Y(I-l, J, K+l)$	非負	自由	ゼロ	自由

$X(I-l, J, K+l)$ は $X(I, J, K)$ の定義の $x_l \geq 0$ を $x_l = 0$ に換えた物なので $X(I, J, K) \supseteq X(I-l, J, K+l)$ が成り立つ。よって $X(I-l, J, K+l) \neq \emptyset$ ならば $X(I, J, K) \neq \emptyset$ である。ゆえに $X(I-l, J, K+l) = \emptyset$ の場合のみ議論する。帰納法の仮定より、 $X(I-l, J, K+l)$ と $Y(I-l, J, K+l)$ は丁度一方が非空となる事から、 $Y(I-l, J, K+l)$ が非空の場合のみ議論する。

同様に、 $Y(I-l, J+l, K)$ の定義は $Y(I, J, K)$ の定義の $y^T A_l \geq 0$ を $y^T A_l = 0$ に換えた物なので、 $Y(I, J, K) \supseteq Y(I-l, J+l, K)$ が成り立ち、 $Y(I-l, J+l, K) \neq \emptyset$ ならば $Y(I, J, K) \neq \emptyset$ である。ゆえに $Y(I-l, J+l, K) = \emptyset$ の場合のみ議論する。帰納法の仮定より、2つの集合 $X(I-l, J+l, K)$ と $Y(I-l, J+l, K)$ は丁度一方が非空なので、 $X(I-l, J+l, K)$ が非空の場合のみ議論する。

上記より、以下の要素が存在する場合のみ議論すれば良い； $\exists \bar{x} \in X(I-l, J+l, K)$, $\exists \bar{y} \in Y(I-l, J, K+l)$.

解 \bar{x}, \bar{y} の定義より、

$$\begin{aligned} 0 &> \bar{y}^T b = \bar{y}^T (A\bar{x}) \\ &= \sum_{i \in I-l} \bar{y}^T A_i \bar{x}_i + \bar{y}^T A_l \bar{x}_l + \sum_{i \in J \cup K} \bar{y}^T A_i \bar{x}_i \\ &= \sum_{i \in I-l} \bar{y}^T A_i \bar{x}_i + \bar{y}^T A_l \bar{x}_l \geq \bar{y}^T A_l \bar{x}_l \end{aligned}$$

となり、 $\bar{y}^T A_l > 0$ または $\bar{x}_l > 0$ が成り立つ。

$\bar{y}^T A_l > 0$ ならば、 \bar{y} は $Y(I, J, K)$ の要素である。

$\bar{x}_l > 0$ ならば、 \bar{x} は $X(I, J, K)$ の要素である。 ■

補題 1: M を $m \times n$ 行列とする。以下の2つの集合のうち1つが要素を持つ。

$$X(M, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Mx = b\},$$

$$Y(M, b) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y^T M = 0^T, y^T b < 0\}.$$

証明: ベクトル b を M の列ベクトルの張る線形空間に直交射影して得られるベクトルを b' とし、 $\bar{y} = b' - b$ と定義する。直交射影の定義より $[\exists \bar{x}, b' = M\bar{x}]$ と $[\bar{y}^T M = 0^T]$ が成り立つ。 \bar{y} の定義より、 $\bar{y}^T b = \bar{y}^T (b' - \bar{y}) = \bar{y}^T M\bar{x} - \|\bar{y}\|^2 = -\|\bar{y}\|^2 \leq 0$ である。

(i) $\bar{y}^T b < 0$ ならば、 $\bar{y}^T M = 0^T$ より $\bar{y} \in Y(M, b) \neq \emptyset$ となる。

(ii) $\bar{y}^T b = 0$ ならば、 $0 = \bar{y}^T b = -\|\bar{y}\|^2$ より $\bar{y} = 0$ が成り立ち、 $M\bar{x} = b' = b' - 0 = b' - \bar{y} = b$ となり、 $\bar{x} \in X(M, b) \neq \emptyset$ である。 ■

上記の証明の特徴の1つは、構成的な事である。すなわち上記の証明は、Farkas の補題の主張を示すベクトルを実際に求める有限時間算法になっている。その際補題1の直交射影には、グラム-シュミットの直交化法を用いる事ができる。

最後に、Farkas の補題を用いて双対定理を証明しよう。 m, n を任意の正整数とし、 A, b, c を $m \times n$ 実行列、 m 次元実ベクトル、 n 次元実ベクトルとする。次の線形計画問題 P とその双対問題 D について議論する。

$$P: \max\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\},$$

$$D: \min\{y^T b \mid y^T A \geq c^T\}.$$

弱双対定理: 2つの線形計画問題 P と D の任意の実行可能解の対 \bar{x}, \bar{y} は、 $c^T \bar{x} \leq \bar{y}^T b$ を満たす。

証明: 問題 P, D の定義と \bar{x}, \bar{y} が各々の実行可能解である事から $\bar{y}^T b = \bar{y}^T A\bar{x} \geq c^T \bar{x}$ となる。 ■

強双対定理: 2つの線形計画問題 P と D のどちらも実行可能解を持つならば、P と D のいずれも最適解を持ち、最適値は一致する。

証明: 不等式系

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m \mid \begin{array}{l} Ax = b, x \geq 0, \\ A^T y \geq c, c^T x \geq b^T y \end{array} \right\}$$

について議論する。 X が空でなく、要素 x, y を持つならば、弱双対定理より明らかに x, y はそれぞれ P と D の最適解であり、P と D の最適値も一致する。以下では、P, D がそれぞれ実行可能解を持つにもかかわらず、 X が空であると仮定をして矛盾を導く。スラック変数 s を導入し、 X の不等式系を見やすく書くと、

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline A & & O \\ \hline O & & -A^T \\ \hline -c^T & & b^T \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} x \\ s \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -c \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$x \geq 0, s \geq 0,$$

となる。ただし、I は単位行列を表し、O は適当なサイズの零行列を表す。Farkas の補題 (一般形) より、 X が空ならば次の線形不等式系の解集合

$$Y = \left\{ (w^T, z^T, q)^T \in \mathbb{R}^{m+n+1} \mid \begin{array}{l} w^T A - qc^T \geq 0^T, z^T \geq 0^T, q \geq 0, \\ -z^T A^T + qb^T = 0^T, w^T b - z^T c < 0 \end{array} \right\}$$

が非空となる。以下では Y が要素 $(\bar{w}^T, \bar{z}^T, \bar{q})^T$ を持つと仮定して矛盾を導く。 \bar{x}, \bar{y} を P, D の実行可能解とすると、弱双対定理より $c^T \bar{x} - \bar{y}^T b \geq 0$ が成り立つが、

$$\begin{aligned} 0 &> \bar{w}^T b - c^T \bar{x} = \bar{w}^T A\bar{x} - c^T \bar{x} \geq \bar{q}c^T \bar{x} - c^T \bar{x} \\ &\geq \bar{q}c^T \bar{x} - \bar{y}^T A\bar{x} = \bar{q}c^T \bar{x} - \bar{y}^T qb \\ &= \bar{q}(c^T \bar{x} - \bar{y}^T b) \geq 0. \end{aligned}$$

となり矛盾。 ■

Farkas の補題を強双対定理から導くことは容易であり (例えば [2] 参照)、逆に Farkas の補題から強双対定理も容易に導かれる (上記の証明や [1] 参照) 事から、この2つは殆ど等価な性質に見える。ではどちらがより始原的なのか? Farkas の補題は許容解の存在性について述べており、強双対定理は最適解について述べている。最適解があるのならば許容解は当然存在するのだから、Farkas の補題の方がより簡単で本質的な性質と考えるのは自然だろう。実は、Farkas の補題と強双対定理を、数値の符号のみに注目した組合せ的な構造に拡張した場合、Farkas の補題が成り立っていないながら、強双対定理が成り立たない状況が存在する事も知られている [3]。

参考文献

- [1] 伊理正夫, 「線形計画法」, 共立出版, 1986.
- [2] 今野浩, 「線形計画法」, 日科技連, 1987.
- [3] 田村明久, 『線形計画法と有向マトロイド計画法』, 「離散構造とアルゴリズム IV」 第1章, 室田一雄編, 近代科学社, 1995.