2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

退化した非線形最適化問題に対して2次収束する主双対内点法

01701240　(株) 数理システム　*山下　浩　YAMASHITA Hiroshi
01702330　東京理科大学理学部　矢部　博　YABE Hiroshi

1. はじめに

本稿では，非線形最適化問題

$$\begin{array}{lll} \text{最小化} & f(x), & x \in \mathbf{R}^n, \\ \text{条　件} & g(x)=0, & x_i \geq 0,\ i \in I_P \subset \{1,2,...,n\} \end{array}$$

を解くための主双対内点法を考える．ただし，$f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$，$g:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$，$I_P$ は添字集合で $p=|I_P|$ とする．ここで，行ベクトルが $e_i^t, i \in I_P$ から成る $p \times n$ 行列を E とすれば，非負条件は $x' \equiv Ex \geq 0$ と書ける．Lagrange 関数を $L(w)=f(x)-y^t g(x)-z^t Ex$ と定義したとき，Karush-Kuhn-Tucker(KKT) 条件は

$$r_0(w)=\begin{pmatrix} \nabla_x L(w) \\ g(x) \\ X'Ze \end{pmatrix}=0, \quad x' \geq 0, z \geq 0,$$

で表される．ただし，$w=(x,y,z)^t$ とし，$y \in \mathbf{R}^m$ と $z \in \mathbf{R}^p$ はそれぞれ等式制約条件と非負条件に関する Lagrange 乗数であり，また，$A(x)$ をその行ベクトルが $\nabla g_i(x)^t$ からなる $m \times n$ 行列，$X'=\mathrm{diag}\left(x'_1,\cdots,x'_p\right)$，$Z=\mathrm{diag}\left(z_1,\cdots,z_p\right)$，$e=(1,\cdots,1)^t \in \mathbf{R}^n$ とする．

主双対内点法は，バリヤパラメータ $\mu>0$ に対してバリヤ KKT 条件：

$$r(w,\mu) \equiv \begin{pmatrix} \nabla_x L(w) \\ g(x) \\ X'Ze-\mu e \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

を内点条件 $x'>0$，$z>0$ のもとで解く．探索方向はこの条件に対するニュートン法によって与えられる．ニュートン方程式：$J(w_k)\Delta w_k=-r(w_k,\mu_k)$ の解を $\Delta w_k=(\Delta x_k,\Delta y_k,\Delta z_k)^t$ とする．ここで，

$$J(w)=\begin{pmatrix} \nabla_x^2 L(w) & -A(x)^t & -E^t \\ A(x) & 0 & 0 \\ ZE & 0 & X' \end{pmatrix}$$

である．

1次独立制約想定（とその他のいくつかの仮定）がみたされる場合は最適解の近傍でヤコビ行列 $J(w)$ は正則となり，μ_k が十分速く0に収束するならばニュートン法が速い局所収束性を与えることを証明することが出来る (たとえば，[2]) が，本稿では1次独立制約想定がみたされない場合について考察する．

2．基本的性質

$w^*=(x^*,y^*,z^*)$ を KKT 点として，S^* を

$$S^*=\{(x^*,y,z)|\nabla_x L(x^*,y,z)=0,\ z \geq 0,\ Zx^{*\prime}=0\}$$

で定義される KKT 点の集合とする．以下で述べる仮定により，点 w^* は唯一となるが，点 y と z は一意に決まるとは限らない．点 w と集合 S^* の距離を

$$\delta(w)=\min_{\hat{w} \in S^*}\|w-\hat{w}\|$$

と定義する．

次の定理は Hager and Gowda [1] で示されている結果から得られるものであるが，本稿の議論の鍵となるものである．

[定理1] 関数 f と g が x^* において2回微分可能で，$A(x^*)v=0, v_i=0,\ i \in \{i|z_i^*>0\}$ と $v_i \geq 0,\ i \in \{i|x_i^*=z_i^*=0\}$ をみたす任意の $v \in \mathbf{R}^n$ に対して，正定数 ξ が存在して $v^t\nabla_x^2 L(w^*)v \geq \xi\|v\|^2$ が成立するとする．それぞれの i に対して $x'_i \geq 0$ あるいは $z_i \geq 0$ で，$w=(x,y,z)^t$ が w^* に十分近いとき

$$\delta(w)=\Theta\left(\left\|\begin{array}{c} \nabla_x L(w) \\ g(x) \\ \min(x',z) \end{array}\right\|\right)$$

となる．□

以下の結果は比較的容易に得られる．

[補題2] $x' \geq 0$, $z \geq 0$ で定理1の仮定が成立するならば $\delta(w)=O\left(\|r_0(w)\|^{1/2}\right)$ が成立する．□

[補題3] 補題2の仮定のもとで

(i) $x'_i=O(\|r_0(w)\|), \quad i \in \{i|z_i^*>0\}$

(ii) $z_i=O(\|r_0(w)\|), \quad i \in \{i|x_i^{*\prime}>0\}$ □

3．アルゴリズムと2次収束

[仮定] **(1)** $w^*=(x^*,y^*,z^*)$ は KKT 点で，$(x^{*\prime},z^*)$ は狭義相補条件をみたす．**(2)** 関数 f と g の2階導関数は x^* で Lipschitz 連続である．**(3)** $A(x^*)v=0$, $v_i=0,\ i \in \{i|z_i^*>0\}$ をみたす任意の $v \in \mathbf{R}^n$ に対して正定数 ξ が存在して $v^t\nabla_x^2 L(w^*)v \geq \xi\|v\|^2$ となる．**(4)** rank $A(x^*)=m$. □

添え字集合 $\mathcal{B}=\{i|x_i^{*\prime}=0$ と $\mathcal{N}=\{i|x_i^{*\prime}>0\}$ を定義し，$n'=|\mathcal{B}|$ とおく．x_B と x_N はそれぞれ成分

が $x'_i, i \in \mathcal{B}$ と $x'_i, i \in \mathcal{N}$ のベクトル, E_B と E_N はそれぞれ $x_B = E_B x$ と $x_N = E_N x$ となる行列とする. $z_B, z_N, X_B, X_N, Z_B, Z_N$ も同様に定義される.

[アルゴリズム **IPlocal**]

Step 0. $\mu_{-1} > 0$ とする. 初期点 $w_0 = (x_0, y_0, z_0)^t$ を $x'_0 > 0$, $z_0 > 0$, $\|r(w_0, \mu_{-1})\| \le M_c \mu_{-1}$, $\beta_1 \mu_{-1} \le (x'_0)_i (z_0)_i, i = 1, 2, ..., p$ をみたすように選ぶ. ここで, M_c と β_1 は正定数. $k = 0$.

Step 1. バリヤパラメータ $\mu_k > 0$ を $\zeta_k = \Theta(1)$ によって, $\mu_k = \zeta_k \|r_0(w_k)\|^2$ と設定する.

Step 2. 探索方向 Δw_k を $J(w_k)\Delta w_k = -r(w_k, \mu_k)$ から計算する.

Step 3. $i = 1, 2, ..., p$ に対して

$$\begin{gathered} \beta_1 \mu_k \le (x'_k + \Delta x'_k)_i (z_k + \Delta z_k)_i, \\ (x'_k + \Delta x'_k)_i > 0, \quad (z_k + \Delta z_k)_i > 0 \end{gathered}$$

ならば $\alpha_k = 1$. さもなくば

$$\begin{gathered} \beta_1 \mu_k \le \min_i \{ (x'_k + \alpha_k \Delta x'_k)_i (z_k + \alpha_k \Delta z_k)_i \} \le \beta_2 \mu_k \\ 0 < \alpha_k < 1, \quad x'_k + \alpha_k \Delta x'_k > 0, \quad z_k + \alpha_k \Delta z_k > 0 \end{gathered}$$

をみたすような α_k を計算する. ここで, β_2 は $\beta_2 > \beta_1$ となる定数.

Step 4. $w_{k+1} = w_k + \alpha_k \Delta w_k$

Step 5. $k := k + 1$ とおいて Step 1 へ. □

[補題 4] w_k が集合 S^* に十分近く, $\|r(w_k, \mu_{k-1})\| = O(\mu_{k-1})$ ならば $\mu_{k-1} \ge \eta \|r_0(w_k)\|$ をみたす正定数 η が存在して

$$\frac{\mu_k}{\mu_{k-1}} = O(\|r_0(w_k)\|).$$

となる. □

[補題 5] w_k が S^* に十分近く, $\|r(w_k, \mu_{k-1})\| = O(\mu_{k-1})$ で, 点 z_k が一様に有界ならば,

$$\begin{aligned} x_{Bk} &= \Theta(\mu_{k-1}), & z_{Bk} &= \Theta(1) \\ x_{Nk} &= \Theta(1), & z_{Nk} &= \Theta(\mu_{k-1}) \end{aligned}$$

となる. □

上の補題における点列 $\{z_k\}$ の一様有界性を保証するためには, たとえば Mangasarian-Fromovitz の制約想定「rank $A(x^*) = m$ で $v_i > 0, i \in \{i | x_i^{*\prime} = 0\}$ と $A(x^*)v = 0$ をみたす $v \in \mathbf{R}^n$ が存在する」が成立すれば良い.

[補題 6] 点 x^* において Mangasarian-Fromovitz 制約想定が成立し, w_k が S^* に十分く $\|r(w_k, \mu_{k-1})\| = O(\mu_{k-1})$ ならば, 補題 5 の結果が成立する. □

補題 5 の仮定の下では, 補題 2 より強い結果を証明することができる.

[補題 7] 補題 5 の仮定の下で $\delta(w_k) = \Theta(\|r_0(w_k)\|)$ が成立する. □

行列

$$\begin{pmatrix} A(x^*) \\ E_B \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{(m+n') \times n}$$

の特異値分解を

$$\begin{pmatrix} A(x^*) \\ E_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}^t \\ \hat{V}^t \end{pmatrix} = U \Sigma \hat{U}^t,$$

と定義する. ここで, rank $\begin{pmatrix} A(x^*) \\ E_B \end{pmatrix} = m + n''$ で $U \in \mathbf{R}^{(m+n') \times (m+n'')}$, $V \in \mathbf{R}^{(m+n') \times (n'-n'')}$, $\hat{U} \in \mathbf{R}^{n \times (m+n'')}$, $\hat{V} \in \mathbf{R}^{n \times (n-m-n'')}$ は直交行列で $U^t V = O, \hat{U}^t \hat{V} = O$ をみたし, $\Sigma \in \mathbf{R}^{(m+n'') \times (m+n'')}$ は正定値対角行列である.

$$\text{(1)} \qquad V^t \begin{pmatrix} A(x^*) \\ E_B \end{pmatrix} = 0, \qquad \begin{pmatrix} A(x^*) \\ E_B \end{pmatrix} \hat{V} = 0$$

の性質がある.

以下の補題はニュートンステップの大きさを評価するものであるが, 2 次収束性のための重要な結果である.

[補題 8] w_k が一様に有界で, $A(x^*)v = 0, v_i = 0, i \in \{i | z_i^* > 0\}$ をみたす任意の $v \in \mathbf{R}^n$ に対して正定数 ξ が存在して

$$\text{(2)} \qquad v^t \nabla_x^2 L(w_k) v \ge \xi \|v\|^2$$

がみたされるとする. w_k が S^* に十分近く $\|r(w_k, \mu_{k-1})\| = O(\mu_{k-1})$ ならば $\Delta w_k = O(\|r_0(w_k)\|)$ となる. □

z_k の一様有界性と条件 (2) は Mangasarian-Fromovitz 制約想定と S^* のすべての点に対する 2 次の十分条件を仮定すればよいことに注意する.

次の補題はアルゴリズム IPlocal の Step 3 におけるステップ幅を評価する.

[補題 9] 補題 8 の仮定の下で $0 \le 1 - \alpha_k = O(\|r_0(w_k)\|)$ となる. □

以下の定理が本稿の主たる結果である.

[定理 1 0] 補題 8 の仮定の下で

$$\|r(w_{k+1}, \mu_k)\| = O(\mu_k), \qquad \delta(w_{k+1}) = O(\delta(w_k)^2)$$

となり, アルゴリズム IPlocal によって生成された点列 $\{w_k\}$ は S^* に 2 次収束する. □

参考文献

[1] W.W.Hager and M.S.Gowda, Stability in the presence of degeneracy and error estimation, *Mathematical Programming*, 85 (1999), pp.181-192.

[2] H.Yamashita and H.Yabe, Superlinear and quadratic convergence of some primal-dual interior point methods for constrained optimization, *Mathematical Programming*, 75 (1996), pp.377-397.