2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

マーケティング活動労力の最適配分問題

01007584　大阪工業大学　一森 哲男　ICHIMORI Tetsuo

1　はじめに

マーケティング活動には，広告活動や販売促進活動などがあるが，これらの活動は広い地域に影響を及ぼすものと狭い地域にしか影響を及ぼさないものを含んでいる．例えば，広告活動において，テレビ，ラジオ，新聞，雑誌などを媒体としたものは広い地域に影響を与えるが，ネオンサインや看板などを利用したものは狭い地域にしか影響を与えない．販売促進活動においても，例えば，景品の当たるキャンペーンなどは広い地域に影響するが，試供品の配布などは狭い地域にしか影響しない．

ここでは，広い地域は多くの狭い地域から構成されていると考え，各広い地域間同士あるいは狭い地域間同士の重なりはないものと仮定する．また，各(広いまたは狭い)地域での活動において，投入労力はその地域全体に均一に作用するものと考える．

各地域での投入労力に対する効用は指数関数で表されると仮定する．このような仮定は非常に一般的で，さまざまな分野でしばしば見受けられる．例えば，探索問題では投入探索労力と目標物の発見確率の関係が指数関数で表現されており，その現実面での有効性が示されている [2]．他にも，ソフトウェアの信頼性の問題があげられる．ここでは，投入テスト労力と残存フォールト数の関係がしばしば指数関数で表現されている [3]．また，文献 [1] では，新製品を対象にして，投入広告費と販売予測値の関係が指数関数で表わされており，実販売値との結果を比較検討しその有用性を立証している．

広い地域は全体で n 個あるとし，i 番目の広い地域は全部で m_i 個の狭い地域を持つものとする．２重添字 ij は i 番目の広い地域の中の j 番目の狭い地域を示す．地域 ij の人口を定数 p_{ij} で，投入労力を変数 x_{ij} で表す．この時の，まだ投入労力の影響を受けていない（広告活動では, 対象商品をまだ認知していない）人の数は平均的に $p_{ij}e^{-a_{ij}x_{ij}}$ で表せるとする．ここで，定数 a_{ij} は地域 ij で定まる正の定数で，投入労力が作用する影響力を示す．添字 i は i 番目の広い地域を示すが，ここに労力 y_i を投入すると (この広い地域に含まれる全ての狭い地域への投入労力 $x_{ij}=0$ に固定したとすると)，まだ投入労力の影響を受けていない人の数は上記と同じように $\left(\sum_{j=1}^{m_i} p_{ij}\right) e^{-b_i y_i}$ と書けるとする．同様に，定数 b_i は地域 i で定まる正の定数で，投入労力が作用する影響力を示す．

狭い地域と広い地域全体で使用できる労力の総和を定数 B で表すと，我々の問題はつぎのように定式化できる．

$$\text{(P)} \qquad \min \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} e^{-a_{ij}x_{ij}} \right) e^{-b_i y_i}$$

$$\text{s.t.} \qquad \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} + y_i \right) \le B,$$

$$x_{ij} \ge 0, \qquad (i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m_i),$$

$$y_i \ge 0, \qquad (i=1,\ldots,n).$$

ここで定数 $p_{ij} > 0$, $a_{ij} > 0$ $(i = 1,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,m_i)$, $b_i > 0$ $(i = 1,\ldots,n)$ とする．また，$0 < B < \infty$ とする．

物理的に考えれば明らかであるが，問題(P)は閉凸集合上の凸関数の最小化問題であるので，この問題は必ず最適解を持つ．さらに，この問題(P)は凸計画法の非線形計画問題であるので，非線形計画法の適当なアルゴリズムを用いれば最適解を得ることができるが，ここではより効率的に解く方法を考える．

2 解法

問題(P)に新しい変数 $z_i \geq 0$ を導入して $\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \leq z_i$ と置くことにより，つぎの n 個の問題 $(\mathrm{Q}_1), \ldots, (\mathrm{Q}_n)$ をつくりだす．

$$(\mathrm{Q}_i) \qquad f_i(z_i) = \min_{x_{i1},\ldots,x_{im_i}} \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} e^{-a_{ij}x_{ij}}$$

$$\text{s.t.} \qquad \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \leq z_i,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (j = 1, \ldots, m_i).$$

問題(Q_i)では z_i は固定されていると考える．ところで，この問題は容易に解くことが可能で，関数 $f_i(z_i)$ も陽に(explicitly)表現できる．

関数 $f_i(z_i)$ は z_i の非負の全領域上で狭義単調減少で狭義凸の滑らかな関数であり，$f_i(+\infty) = +0$ となる．

すると，問題(P)はつぎのように書くことができる．

$$(\mathrm{P}') \qquad \min \sum_{i=1}^{n} f_i(z_i) e^{-b_i y_i}$$

$$\text{s.t.} \qquad \sum_{i=1}^{n} (z_i + y_i) \leq B,$$

$$z_i \geq 0,\ y_i \geq 0, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

ここで，目的関数 $f_i(z_i)e^{-b_i y_i}$ は凸関数であるので，問題(P′)も有界な凸計画問題となる．故に，この問題の双対問題も有界となり，主問題(P′)の最小値に等しい最大値を持つ．双対問題は有界なので，つぎの双対関数 $g(\lambda)$ も有限の確定値を持つ λ に対してのみ定義されているとする．

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \min_{\substack{\mathbf{z}\geq 0\\ \mathbf{y}\geq 0}} L(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \lambda) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\min_{\substack{z_i\geq 0\\ y_i\geq 0}} \left\{ f_i(z_i)e^{-b_i y_i} + \lambda(z_i + y_i) \right\} \right] \\ &\quad - B\lambda. \end{aligned}$$

いま，

$$h_i(\lambda) = \min_{\substack{z_i\geq 0\\ y_i\geq 0}} \left\{ f_i(z_i)e^{-b_i y_i} + \lambda(z_i + y_i) \right\}$$

と置くと，$\lambda = 0$ の時，右辺の関数は明らかに，下界は存在するが，確定した最小値を持たないので，以下 $\lambda > 0$ と仮定する．双対問題(D)は形式的に次のような凹関数の最大化問題と書ける．

$$(\mathrm{D}) \qquad \max_{\lambda>0} g(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} h_i(\lambda) - B\lambda.$$

参考文献

[1] R.Blattberg and J.Golanty, An early test market forecasting and diagnostic model for new product planning, *Journal of Marketing Research*, **XV**(1978), 192–202.

[2] B.O.Koopman, The theory of search: part III, the optimum distribution of searching effort, *Operations Research*, **5**(1957), 613–626.

[3] J.D. Musa, A Theory of Software Reliability and Its Application, *IEEE Trans. Software Engineering*, **SE-1**(1975), 312–327.