1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

金利派生商品の時価評価

興銀第一フィナンシャルテクノロジー（株）金融工学第二部*
白川 正樹†

平成11 年 8 月 10 日

1 背景

従来の日本の金融派生商品（デリバティブ）の会計基準は「発生主義」に基づいており、含み損益は決済時点まで損益認識されない。現行、時価評価額等は有価証券報告書に注記事項として開示しているのみである。一方、国際的な会計基準のトレンドは「時価主義」となっており、日本においても、企業会計審議会が 1999 年 1 月「金融商品に係る会計基準の設定に関する意見書」を公表、詳細は実務指針待ちであるものの、全事業会社へのデリバティブ時価会計の導入が確定した。これにより 2000 年 4 月以降に始まる事業年度から、デリバティブ取引の時価を貸借対照表に計上（オンバランス）、評価差益損は損益計算書に計上することになる。ここでいう時価の定義は「当該デリバティブ取引の対象としている何らかの金融商品の市場価格又はそれに基づく合理的な価額」となっており、市場性のないエキゾチック・デリバティブについても、合理的な時価評価ロジックを構築する必要がある。

本稿では Jamshidian [5] によるマーケット・モデルをベースにした金利派生商品の評価法、および測度変換によるエキゾチック・デリバティブズの合理的なプライシング・ロジックを解説する。当手法は、各種パラメーターを推定することなく市場で観測される情報のみを用いて金利デリバティブを時価評価する手法である。また、当ロジックをベースに当社にて作成中の金利デリバティブ取引管理システム「NDS2000」もあわせて紹介する。

2 金利市場と評価測度

ファイナンス理論において、金利は仮想的な連続複利として扱われることが多い。しかし実際の市場では連続複利金利は観測されず、単利である LIBOR レート・スワップレートをもとに期間構造が形成されている。また、これらのレートを原資産とした金利デリバティブ市場（キャップ市場・スワップション市場）が成り立っている。これらの市場価格をもとにエキゾチック・デリバティブを評価していく。従来の金利モデルは、いくつかのパラメーターを用いて金利の期間構造の変化をモデル化するものが多かった。一方で、一般的に実務界では、原資産である金利レートそのものを確率過程と考え、Black-Scholes 式を使って簡略的にプライシングをおこなう慣習になっている。この両者の関係を測度変換の考え方を用いて整理する。

*〒 100-0004 東京都千代田区大手町 1-5-1 大手町ファーストスクエア West 7F
†E-mail: masaki-shirakawa@fintec.co.jp

以下の記号を使用する。LIBOR の利払日の集合を $\{T_i; i \in \{1,2,\ldots,n\}\}$

$$\delta_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} T_i - T_{i-1}, \quad 0 \le t \le T_0 < T_1 < \cdots < T_n < \infty$$

とする。ここでフォワード LIBOR レートを表す確率過程を $\{L_i(s); s \in [0, T_{i-1}]\}$ とおき、

$$\frac{1}{1+\delta_i L_i(s)} = F(s; T_{i-1}, T_i) \tag{2.1}$$

と定義する。L_i のフィキシング時点[1]は T_{i-1}、決済時点は T_i である。ただし、$F(s;\tau,T)$ は次式のように割引債 $B(\tau,T)$ の時点 s における先渡価格を表す。

$$B(\tau,T) = \tilde{E}_\tau\left[\exp\left\{-\int_\tau^T r_v dv\right\}\right]$$
$$F(s;\tau,T) = \tilde{E}_s\left[\frac{\exp\left\{-\int_s^\tau r_v dv\right\}}{B(s,\tau)}B(\tau,T)\right] = \frac{B(s,T)}{B(s,\tau)}$$

ここで、$\{r_s; s \in \mathbb{R}^+\}$ は連続複利金利のスポットレート過程、$\tilde{E}_s[\cdot] = \tilde{E}[\cdot|\mathscr{F}_s]$ はリスク中立確率の下での条件付期待値を表す。

金利期間 $[T_{i-1}, T_i)$ の最終時点 T_i に受け取る金利 $\delta_i L_i(T_{i-1})$ のコールオプション（行使レート K のキャップレット）の時点 t における現在価値 $C_i(t)$ は次のように計算される。

$$\begin{aligned}
C_i(t) &= \tilde{E}_t\left[\exp\left\{-\int_t^{T_i} r_v dv\right\}\delta_i(L_i(T_{i-1})-K)^+\right] \\
&= \delta_i B(t,T_i)\tilde{E}_t\left[\frac{\exp\left\{-\int_t^{T_{i-1}} r_v dv\right\}}{B(t,T_i)}\tilde{E}_{T_{i-1}}\left[\exp\left\{-\int_{T_{i-1}}^{T_i} r_v dv\right\}(L_i(T_{i-1})-K)^+\right]\right] \\
&= \delta_i B(t,T_i)\tilde{E}_t\left[\frac{\exp\left\{-\int_t^{T_{i-1}} r_v dv\right\}B(T_{i-1},T_i)}{B(t,T_i)}(L_i(T_{i-1})-K)^+\right] \\
&= \delta_i B(t,T_i)\tilde{E}_t\left[\xi_i(T_{i-1})(L_i(T_{i-1})-K)^+\right] \\
&= \delta_i B(t,T_i)E_t^i\left[(L_i(T_{i-1})-K)^+\right]
\end{aligned}$$

ここで確率変数 $\xi_i(T_{i-1})$ は Radon-Nikodym 微分であり、これにより変換された測度を "T_i-Forward LIBOR Measure" と呼ぶ[2]。市場では、この測度の下でフォワード LIBOR レートが次の確率微分方程式に従うと仮定している。

$$\frac{dL_i(s)}{L_i(s)} = \sigma_i \cdot dW_s^i$$

$\{W_s^i; s \in \mathbb{R}^+\}$ は、T_i-Forward LIBOR Measure の下での Wiener 過程である。これにより、連続複利金利 r を用いずに金利オプションが評価可能になる。

次にスワップションの場合を考える。ここで $\{S_{i,j}(s); s \in [0, T_i]\}$ を、以下のように期間 $[T_i, T_j]$ のフォワードスワップレートを表す確率過程とする。

$$S_{i,j}(s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{B(s,T_i)-B(s,T_j)}{\sum_{k=i+1}^{j}\delta_k B(s,T_k)} = \frac{1-F(s;T_i,T_j)}{\sum_{k=i+1}^{j}\delta_k F(s;T_i,T_k)}.$$

[1]スポット LIBOR レートの意味で、L_i が観測される時点。
[2]実質的には、T_i 時点の Forward Measure と同値である。

$S_{i,j}(T_i)$ を原資産とするペイヤーズ（固定払）・スワップション価格 $C_{i,j}(t)$ は

$$\begin{aligned}
C_{i,j}(t) &= \tilde{E}_t\left[\exp\left\{-\int_t^{T_i} r_v dv\right\}(S_{i,j}(T_i)-K)^+ \sum_{k=i+1}^{j}\delta_k B(T_i,T_k)\right] \\
&= \tilde{E}_t\left[\exp\left\{-\int_t^{T_i} r_v dv\right\}\sum_{k=i+1}^{j}\delta_k B(T_i,T_k)\right] \\
&\quad \times \tilde{E}_t\left[\frac{\exp\left\{-\int_t^{T_i} r_v dv\right\}\sum_{k=i+1}^{j}\delta_k B(T_i,T_k)}{\tilde{E}_t\left[\exp\left\{-\int_t^{T_i} r_v dv\right\}\sum_{k=i+1}^{j}\delta_k B(T_i,T_k)\right]}(S_{i,j}(T_i)-K)^+\right] \\
&= \sum_{k=i+1}^{j}\delta_k B(t,T_k)\cdot\tilde{E}_t\left[\xi_{i,j}(T_i)(S_{i,j}(T_i)-K)^+\right] \\
&= \sum_{k=i+1}^{j}\delta_k B(t,T_k)\cdot E_t^{i,j}\left[(S_{i,j}(T_i)-K)^+\right]
\end{aligned}$$

ここで Radon-Nikodym 微分 $\xi_{i,j}(T_i)$ により変換された測度を "$[T_i,T_j]$-Forward Swap Measure" と呼ぶ。この測度の下でフォワードスワップレートは次の確率微分方程式に従う。

$$\frac{dS_{i,j}(s)}{S_{i,j}(s)} = \sigma_{i,j}\cdot dW_s^{i,j}$$

ただし $\{W_s^{i,j}; s\in[0,T_i]\}$ は、$[T_i,T_j]$-Forward Swap Measure の下で Wiener 過程である。すると、キャップレット価格 $C_i(t)$、ペイヤーズ・スワップション価格 $C_{i,j}(t)$ ともに Black-Scholes 式を用いて解析解を求めることができる。市場では、これらの式を用いて計算されたインプライド・ボラティリティー $\sigma_i, \sigma_{i,j}$ を観測することができる[3]。

3 エキゾチック・デリバティブズ

Forward LIBOR Measure・Forward Swap Measure ともに、ある特定の原資産をターゲットにした測度であり、汎用性は低い。多数のキャッシュフローが互いに影響を及ぼしあうような商品の場合、すべてのキャッシュフローを統一的な測度で測る必要がある。

LIBOR レートを原資産とする商品の場合、LIBOR レートそのものを割引関数に利用することができる。例として、時点 T_n に発生する $\mathscr{F}_{T_{n-1}}$-可測なキャッシュフロー C_{T_n} を評価することを考える。一般的に C_{T_n} は、それ以前の事象にも依存して構わない。C_{T_n} を評価するためには、次の入れ子状になった条件付期待値を考えればよい。

$$\begin{aligned}
&\tilde{E}_t\left[e^{-\int_t^{T_n} r_v dv}C_{T_n}\right] \\
&= \tilde{E}_t\left[e^{-\int_t^{T_0} r_v dv}\tilde{E}_{T_0}\left[e^{-\int_{T_0}^{T_1} r_v dv}\tilde{E}_{T_1}\left[e^{-\int_{T_1}^{T_2} r_v dv}\cdots\tilde{E}_{T_{n-1}}\left[e^{-\int_{T_{n-1}}^{T_n} r_v dv}C_{T_n}\right]\cdots\right]\right]\right] \\
&= B(t,T_0)\tilde{E}_t\left[\xi_{t,T_0}B(T_0,T_1)\tilde{E}_{T_0}\left[\xi_{T_0,T_1}\cdots B(T_{n-1},T_n)\tilde{E}_{T_{n-1}}\left[\xi_{T_{n-1},T_n}C_{T_n}\right]\cdots\right]\right] \\
&= B(t,T_0)E_t^0\left[\frac{1}{1+\delta_1 L_1(T_0)}E_{T_0}^1\left[\cdots\frac{1}{1+\delta_{n-1}L_{n-1}(T_{n-2})}E_{T_{n-2}}^{n-1}\left[\frac{1}{1+\delta_n L_n(T_{n-1})}C_{T_n}\right]\cdots\right]\right]
\end{aligned}$$

[3]キャップ市場の場合、キャップレットの集合体である、ある期間のキャップのボラティリティーが観測されるだけであり、当キャップを構成する個々のキャップレット毎のボラティリティーは何らかの手法を用いて算出する必要がある。また、いわゆる「スマイル現象」が発生しており、インプライド・ボラティリティーは行使レート毎に異なった値をとる。

ただし

$$\xi_{\tau,T} = \frac{e^{-\int_\tau^T r_v dv}}{B(\tau,T)}$$

である。このとき、各フォワードLIBORレート $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ は次の確率微分方程式に従う。

$$\frac{dL_i(s)}{L_i(s)} = \sigma_i \left(dW_s^* + \sum_{k=n(s)}^{i} \sigma_k \frac{\delta_k L_k(s)}{1+\delta_k L_k(s)} ds \right), \quad i \in \{1,2,\dots,n\} \tag{3.1}$$

ただし、$n(s)$ は時点 s から直近にフィキシングを迎えるフォワードLIBORレートのナンバリングを表し、以下の式を満たす。

$$T_{n(s)-2} \leq s < T_{n(s)-1}$$

ここで $\{W_s^*; s \in \mathbb{R}^+\}$ は "Spot LIBOR Measure" [5] の下でWiener過程である。

4 NDS2000

以上のロジックをもとに、当社では金利デリバティブ取引サポートシステム「NDS2000」を作成している。

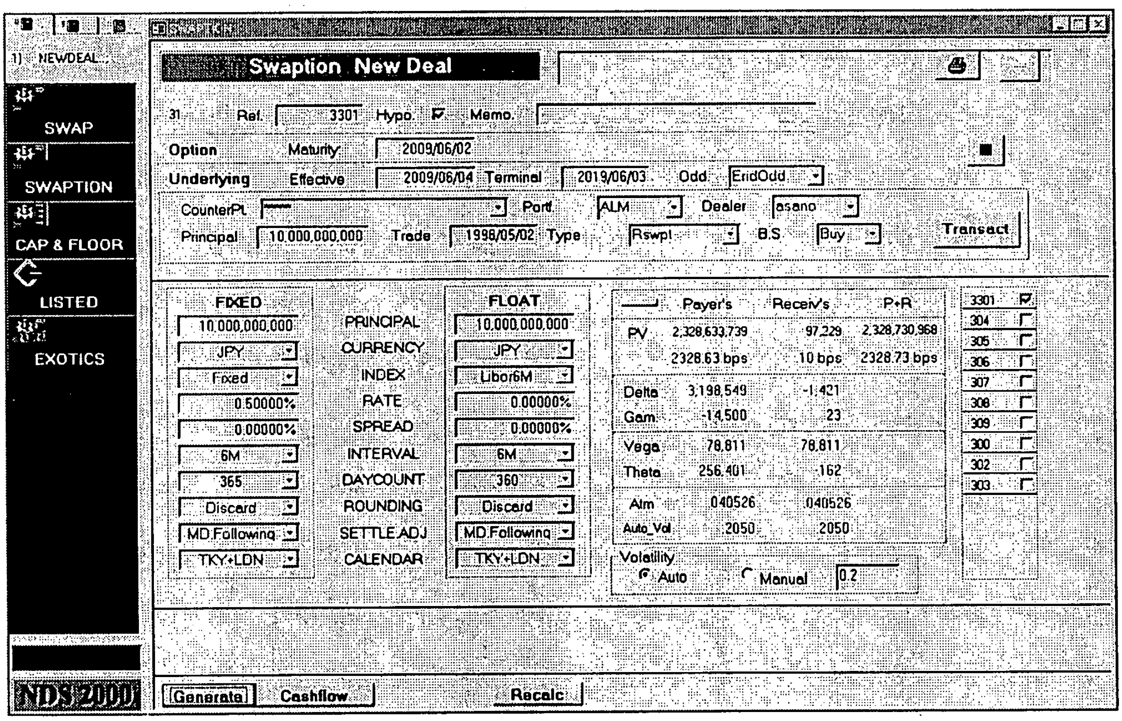

図 1: NDS2000 取引画面（開発中）

NDS2000は、高速精緻にプライシング・リスク管理・取引管理をおこなうシステムであり、カバーしている商品は、表1のとおりである。

	Products
Plain	Swap, Cap/Floor, Swaption
Exotic	Bermudan Swaption, Caption/Floortion, CMS Swap/Cap/Floor, Yield-Spread Option, Flexible Cap/Floor, Callable Reverse Floater, etc.
Listed	Euro-yen Futures and Options, JGB Futures and Options

表 1: 商品群

これらすべての商品について、PC ベースで、現在価値（PV; Present Value）および各種リスク指標（Delta・Gamma・Vega・Theta）の算出が可能である。各種機能としては、以下にあげるものを備えている。

- 新規取引プライシング（PV）・各種リスク指標計算（Delta・Gamma・Vega・Theta）
- 既存取引の時価評価・リスク管理
- 取引管理
  - 取引入力・修正
  - 金利更改
  - オプション権利行使、等
- シミュレーション
  - イールドカーブ・シフト
  - ボラティリティー・シフト
  - 日付シフト
- 各種帳票作成
  - Taylor 展開を利用し、PV の変化量を金利変動要因（Delta・Gamma）、ボラティリティー変動要因（Vega）、時間変動要因（Theta）および残差部分に分解、認識、コントロール
- 変動要因分析

当システムのデータ管理はデータベースソフトを用い、各種計算関数についてはDLL を作成し、利用している。その際、解析解のないプロセス(3.1) をシステム上でプライシングできるように構築することは非常に難しく、実際には各種のノウハウが必要となってくる。

5 終わりに

本稿では、デリバティブズの会計上の時価評価問題、Black-Scholes モデルをベースにした金利モデル、およびその実用化の例を紹介した。しかし現状においても、エキゾチック系商品の内部計算ロジック高速化など実務上の課題はいくつも存在している。特にボラティリティーのスマイル

問題は、Black-Scholes 式が仮定している分布の対数正規性と実際の市場特性の相違によるもので、原資産過程の（高次）モーメントを調整することによる確率分布の改善も必要になろう。

今後とも金融業務においても金融工学をベースにした OR 的な発想、つまり、現実問題の把握→問題の数理的な定式化→解決、という業務フローによって各種の問題を解決していくことができるものと考えている。

参考文献

[1] Baxter, M. and Rennie, A. *Financial Calculus, An introduction to derivative pricing.* Cambridge University Press, 1996.

[2] Brace, A., Gatarek, D. and Musiela, M. The market model of Interest rate dynamics. Working paper, May 1995.

[3] Duffie, D. *Dynamic Asset Pricing Theory.* Princeton University Press, 2nd edition, 1996.

[4] Heath, D., Jarrow, R. and Morton, A. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*, **60**(1), 77–105, 1992.

[5] Jamshidian, F. LIBOR and swap market models and measures. *Finance and Stochastics*, **1**(4), 293–330, 1997.

[6] Musiela, M. and Rutkowski, M. Continuous-time term structure models: Forward measure approach. *Finance and Stochastics*, **1**(4), 261–291, 1997.