1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

# Quasi-Kronecker Sum

東京電機大学　理工学部　情報科学科　　　　町原　文明

互いに相関のある複数のマルコフ到着過程(MAP)の重畳を考える。今、表現$(T, T^o\alpha)$,$(S, S^o\beta)$をもつ２つのマルコフ到着過程を考える。その到着間隔密度関数はそれぞれ$f_1(x) = \exp(Tx)T^o\alpha$、$f_2(x) = \exp(Sx)S^o\beta$と書くことができる。この２つの過程が独立したものなら重畳したものはつぎの表現をもつマルコフ到着過程になることがよく知られている。

$$(T \oplus S, T^o\alpha \oplus S^o\beta)$$

ここで、$\oplus$はKronecker sumといい、Kronecher productにより以下のように表される。

$$X \oplus Y = X \otimes I_2 + I_1 \otimes Y$$

従って、重畳された到着過程の到着間隔密度関数は、$f(x) = \exp((T \oplus S)x)(T^o\alpha \oplus S^o\beta)$と書くことができる。さて、２つのマルコフ到着過程に相関をいれるにはどうしたらいいだろうか？これに答えるために次のようなquasi-Kronecker sum$\odot$を導入する。

$$X \odot Y = D(X) \otimes I_2 + OD(X) \otimes Q_2 + I_1 \otimes D(Y) + Q_1 \otimes OD(Y)$$

$D(X)(D(Y))$は行列$X(Y)$の対角成分からなる行列、$OD(X)(OD(Y))$は非対角成分からなる行列を表す。$Q_1$、$Q_2$はある確率行列でこれらにより相関が導入される。$Q_1$と$Q_2$が単位行列の時、quasi-Kronecker sumは通常のKronecker sumに一致する。
今、無限小生成作用素

$$A = T \odot S + T^o\alpha \odot S^o\beta$$

の定常確率ベクトルを$P$する。もし、２つのマルコフ到着過程が独立であるなら、

$$P = (p(1,1), p(1,2), \cdots, p(1, m_2), p(2,1), \cdots, p(m_1, 1), \cdots, p(m_1, m_2)),$$

$$p_1(i) = \sum_j p(i,j), p_2(j) = \sum_i p(i,j)$$

において以下の式が成立する。

$$p(i,j) = p_1(i)p_2(j)$$

ここに、$\{p_1(i)\}$、$\{p_2(i)\}$は、それぞれ$T + T^o\alpha$、$S + S^o\beta$の定常確率ベクトルとなる。
特に今、特別な場合として、２つのマルコフ変調ポアソン到着過程を考えよう。$T^o\alpha$の対角要素を$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{m1}$、$S^o\beta$の対角要素を$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{m2}$とする。総平均到着率$\lambda + \gamma$は

$$\lambda + \gamma = \sum(\lambda_i + \gamma_j)p(i,j) = \sum_i \lambda_i p_1(i) + \sum_j \gamma_j p_2(j)$$

と表すことができる。2つのマルコフ変調ポアソン到着過程の到着率の共分散は、以下のように定義してよいだろう。

$$Cov = \sum_{i,j} \lambda_i \gamma_j p(i,j) - \sum_{i,j} \lambda_i \gamma_j p_1(i) p_2(j) = \sum_{i,j} \lambda_i \gamma_j p(i,j) - \lambda\gamma$$

もし、$p(i,j) = p_1(i)p_2(j)$ と表すことができるなら、

$$Cov = 0$$

となるが、2つの到着過程に相関があるなら$Cov$が0となるとは限らない。この$Cov$の大小、正負は$Q_1$と$Q_2$の構造により決まるが、待ち行列システムの待ち時間にどのような影響をあたえるのかを今後調べていく。