遡及不可能事象法と確率変数の平均有限性

東京都立大学　中塚利直　NAKATSUKA　Toshinao

要約：

遡及不可能事象を使って確率モデルの安定性を求めた場合、同時に、待ち行列における系内客数等の確率変数の平均の有限性が得られる。

§1。遡及不可能事象

待ち行列モデル等を

$$x_t = \Gamma(x_s,\ T_s\phi,\ t-s)$$

の形に表現したとき、吸収過程 x^*_t が存在する ϕ の領域 M^* が定まる。 M^* が確率1の集合を含んでいることの証明手段として遡及不可能事象法は有効である。

待ち行列モデルを上の形式で表現できたとして、$\cdots \leqq e(-1) \leqq e(0) < (0 \leqq) e(1) \leqq \cdots$ を客の到着とする。$e(n)$ に到着した客は自分自身のサービス時間ベクトル τ_n を持ってくるとする。 $\tau^e_n = e(n+1) - e(n)$ とおき、 $\{\tau^e_n,\ \tau^{\Delta}_n : n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ は定常過程でエルゴディックであるとする。また、$E\tau^e_n < \infty$ とする。

遡及不可能事象はこの場合離散型で考えて、分解表示 $A(n) = M_1(n) \cap M_2(n)$ が可能とする。ただし、 $M_1(n)$ は

$$M_1(n) = \{\phi \mid x^r_n(\phi, a) \in Y \text{ for any } r \leqq t \text{ and any } a \in \overline{X}\}$$

なる集合Yをもつとする。 この式で $x^r_n(\phi, a)$ は $e(r)$ 直前の状態が a のとき、 $e(n)$ 直前の状態をさす。 $M_2(n)$ も次のようなものとする。時点 $e(n)$ 直前の系の状態が b のとき、$e(n+1)-e(n)$ が十分大きい場合を考えて、$e(n)$ からサービスが行われ、$e(n)+c(b,\ \tau^{\Delta}_n)(<e(n+1))$ でサービスが終了するとする。そして

$$C(n) = \sup\{c(b,\ \tau^{\Delta}_n) :\ b \in Y\}$$

$$M_2(n) = \{\phi \mid C(n) < \tau^e_n\}$$

と置く。 $A(n)$ がこのようなものであるとき、$\Pr(A(n)) > 0$ となっているとしよう。

§2。遡及不可能事象生起間の長さ

$$X_n = \begin{cases} \tau^e_n - C(n) : \phi \in A(n) \\ 0 \qquad\qquad\ : \text{その他} \end{cases}$$

とおくと、X_n は定常でエルゴディックである。よって

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{n\to\infty} EX_0$$

ところで

$$EX_0 = \int X_0(\Phi(\omega))dP(\omega) \leqq \int \tau^e_n dP(\omega) < \infty$$

またC(n)も定常でエルゴディックであるから

$$C(n)/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

次に

$$I_n = \begin{cases} 1 : \phi \in \Lambda(n) \\ 0 : \text{その他} \end{cases}$$

とすれば、I_n も定常でエルゴディックになるから、

$$\Sigma_{i=1}^{n} I_i(\phi) / n \xrightarrow{n\to\infty} EI_0 = Pr(A(0)) > 0$$

そこで $I_n(\phi)=1$ となっている n を $(0<) n_1 < n_2 < \cdots$ とすると

$$i / n_i \xrightarrow{i\to\infty} EI_0$$

さらに

$$R_i = e(n_{i+1}) + C(n_{i+1}) - e(n_i)$$

とおくと

$$e(n_{i+1}) + C(n_{i+1}) = e(n_1) + C(n_1) + \Sigma_{j=1}^{i} (X_{n_j} + R_{n_j})$$

この両辺を $e(n_{i+1})$ で割ると

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\Sigma_{j=1}^{i} R_n}{e(n_{i+1})} = \lim_{i\to\infty} \left\{ 1 - \frac{\Sigma_{j=1}^{i} X_n}{e(n_{i+1})} \right\}$$

$$= \lim_{i\to\infty} \left\{ 1 - \frac{n_{i+1}}{e(n_{i+1})} \frac{1}{n_{i+1}} \sum_{p=1}^{n_{i+1}} X_p \right\}$$

$$= 1 - EX_0 / E\tau_n^e$$

よって

$$\Sigma_{j=1}^{i} R_{n_j} / i = \frac{n_{i+1}}{i} \frac{e(n_{i+1})}{n_{i+1}} \frac{1}{e(n_{i+1})} \sum_{j=1}^{i} R_{n_j}$$

$$\xrightarrow{i\to\infty} (E\tau_n^e - EX_0) / EI_0$$

§3。待ち時間

吸収過程における待ち時間 W_n は定常でエルゴディックであるから

$$(W_1 + \cdots + W_n) / n \xrightarrow{n\to\infty} EW_0 \leqq \infty$$

となる。遡及不可能事象の作り方から $e(n_i)$ 直前に系に客はいない。そこで各客はいづれかの区間 $[e(n_i), e(n_{i+1}))$ に滞在する。そこで、その区間内での待ち時間の最大を W^{max} とする。ならば、

$$\frac{W_1 + \cdots + W_n}{n} \leqq \frac{W_1^{max} + \cdots + W_p^{max}}{p} < \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} R_i$$

がいえるから $EW_0 < \infty$ がいえる。