1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

周期的なクラスタ到着と一定サービス時間をもつ単一サーバ待ち行列における系内滞在時間分布

京都大学情報学研究科　*井上 大　Dai Inoue
滝根 哲哉　Tetsuya Takine

1　モデル

本稿では, 周期的なクラスタ到着を生成する同質な $(S+1)$ 個の呼源を収容する FIFO 単一サーバ待ち行列を考える. 各呼源は周期 T をもち, 一定のサービス時間 $(=1)$ をもつセルを各周期の開始時点から連続的に間隔 1 で $(M+1)$ 個発生する. さらに, 呼源 0 の周期は $t=nT$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ から開始するものとし, 他の呼源 i $(i=1,\ldots,S)$ の周期の開始時点は互いに独立に一様に分布しているものとする (図 1). 以下では, システムが時刻 $t=-\infty$ から始まり, かつ $(S+1)(M+1)<T$ の仮定の下で, $[0,T)$ に発生する, 呼源 0 の $i+1$ 番目 $(i=0,1,\ldots,M)$ のセルの系内滞在時間 Q_i の分布関数を考察する. 解析を簡単化するため, Q_{M-i} $(i=0,1,\ldots,M)$ を考察する際, 各呼源の時刻 $t=-i$ 以前に開始する周期内でのセルの到着は周期の最初の時点で集団で到着するものとして扱う (図 2). このような変更を行っても Q_{M-i} の分布に変化はない [2]. 時刻 $t+$ における系内仕事量を V_t^i としたとき, Q_{M-i} の確率分布は V_{M-i}^i の確率分布に等しい. よって, 以下では $\Pr(V_{M-i}^i\le v)$ $(i=0,\ldots,M,\ v\ge1)$ を導出する.

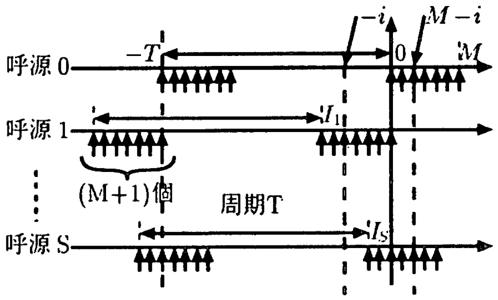

図 1: 元のモデル

2　残余仕事量 V_{M-i}^i

${\alpha^i}_x^y$ を時間間隔 $(x,y]$ に呼源 0 以外の S 個の呼源から到着するメッセージの先頭の数とすると,

$$V_t^i=\max\left\{V_{t_0}^i+{\alpha^i}_{t_0}^t-(t-t_0),\ \max_{0\le u\le t-t_0}\left({\alpha^i}_{t-u}^t-u\right)\right\}$$

B_x^y を時間間隔 $(x,y]$ に呼源 0 以外の S 個の呼源から到着するメッセージの先頭の数, G_x^y を時間 $(x,y]$ 内で, 一番初めに到着する先頭のセルの到着時刻と時刻 x との差とそれぞれ定義する (ただし, $B_x^y=0$ の場合は $G_x^y=y-x$). このとき

$$V_{M-i}^i=\max\left\{V_{-i}^i+\sum_{k=1}^{M}kB_{M-i-k}^{M-i-k+1}-i+1,\right.$$
$$\left.\sum_{k=1}^{M}kB_{M-i-k}^{M-i-k+1}-i+1+G_{-i}^0\right\}$$
$$V_{-i}^i=\max\left\{\max_{0\le u\le T-M}\left((M+1)B_{-i-u}^{-i}-u\right),\right.$$
$$\left.(S+1)(M+1)-T+G_{-i}^0\right\}$$

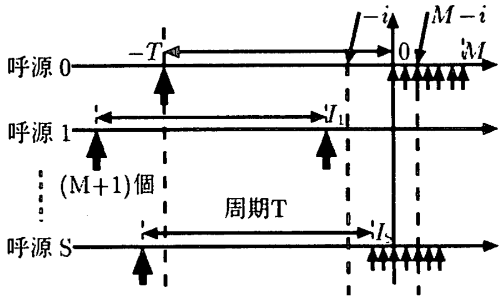

図 2: 変更後のモデル

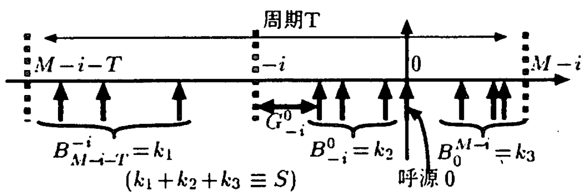

図 3: 到着時刻の場合分け

図 3のように場合分けを行ない, 事象 I_k^i を $I_k^1\equiv\{B_{M-i-T}^{-i}=k\}$, $I_k^2\equiv\{B_{-i}^0=k\}$, $I_k^3\equiv\{B_0^{M-i}=k\}$ と定義すると次式を得る.

$$\Pr(V_{M-i}^i\le v)$$
$$=\sum_{k_1+k_2+k_3=S}\frac{S!}{k_1!k_2!k_3!}\left(\frac{T-M}{T}\right)^{k_1}\left(\frac{i}{T}\right)^{k_2}\left(\frac{M-i}{T}\right)^{k_3}$$
$$\cdot\Pr\left(V_{M-i}^i\le v\,\middle|\,I_{k_1}^1,I_{k_2}^2,I_{k_3}^3\right)\quad(1)$$

以下では $\Pr\left(V^i_{M-i} \le v \middle| I^1_{k_1}, I^2_{k_2}, I^3_{k_3}\right)$ を考える.

定理 1
$B^0_{-i} = k_2 \ge 1$ のとき

$$\Pr\left(V^i_{M-i} \le v \middle| I^1_{k_1}, I^2_{k_2}, I^3_{k_3}\right)$$
$$= \sum_{l=0}^{\lfloor g^u_i(v) \rfloor} \sum_{k_4=1}^{k_2} \frac{1}{i^{k_2}(M-i)^{k_3}} \frac{k_2!}{k_4!(k_2-k_4)!}$$
$$\cdot \Bigg\{ \left[1-(1-x^{u1}_i(v,l))^{k_4}\right]$$
$$\cdot \sum_{j=0}^{j^u_i(l,v)} n_i(l, j-k_4(M-l), k_2-k_4, k_3) r_i(v+i-1-j, k_1)$$
$$+ \left[(1-x^{u1}_i(v,l))^{k_4} - (1-x^{u2}_i(v,l))^{k_4}\right]$$
$$\cdot \sum_{j=0}^{j^u_i(l+1,v)} n_i(l, j-k_4(M-l), k_2-k_4, k_3) r_i(v+i-1-j, k_1) \Bigg\}$$

一方, $B^0_{-i} = k_2 = 0$ に対しては次式が成り立つ.

$$\Pr\left(V^i_{M-i} \le v \middle| I^1_{k_1}, I^2_0, I^3_{k_3}\right) = \sum_{j=0}^{j^u_i(0,v)} \frac{n_i(0,j,0,k_3)}{(M-i)^{k_3}} r_i(v+i-1-j, k_1)$$

ただし,

$$n_i(l,j,k_2,k_3) \equiv (i-l-1)^{k_2}(M-i)^{k_3} \cdot \Pr\left(\sum_{k=1}^{M-l-1} k B^{M-i-k+1}_{M-i-k} = j \middle| B^0_{-i+l+1} = k_2, I^3_{k_3} \right)$$

$$r_i(y,k_1) \equiv \Pr\left(\max_{0 \le u \le T-M} ((M+1)B^{-i}_{-i-u} - u) \le y \middle| I^1_{k_1} \right)$$
$$g^u_i(v) \equiv T-(S+1)(M+1)+v+i-1$$
$$j^u_i(g,v) \equiv \lfloor v-g \rfloor + i - 1$$
$$x^{u2}_i(v,l) \equiv \min(g^u_i(v)-l, 1)$$
$$x^{u1}_i(v,l) \equiv \min(g^u_i(v)-l, v-\lfloor v \rfloor)$$

$n_i(l,j,k_2,k_3)$ は $B^0_{-i+l+1} = k_2, B^{M-i}_0 = k_3$ という条件の下での, $\sum_{k=1}^{M-l-1} k B^{M-i-k+1}_{M-i-k} = j$ となる場合の数と解釈できるので, 次の補題が得られる.

補題 1
整数 l に対して以下の 3 式を用いて $n_i(l,j,k_2,k_3)$ を再帰的に求めることができる.

$$n_i(l,j,0,0) = \begin{cases} 1 & j=0 \\ 0 & j \ne 0 \end{cases}$$

$$n_i(l,j,k_2+1,k_3) = \sum_{i=M-i+1}^{M-l-1} n_i(l, j-i, k_2, k_3)$$
$$n_i(l,j,k_2,k_3+1) = \sum_{i=1}^{M-i} n_i(l, j-i, k_2, k_3)$$

また, Ballot Theorem [1] と次の関係より補題2を得る.

$$\max_{0 \le u \le T-M} \left((M+1)B^{-i}_{-i-u} - u\right) \le y$$
$$\Leftrightarrow (M+1)B^{-i}_{-i-u} - u \le y, \forall u \in [0, T-M]$$

補題 2 $r_i(y,k_1)$ は次式で与えられる.

$$r_i(y,k_1) = 1 - \sum_{m=\lceil \frac{y}{M+1} \rceil}^{k_1} \frac{(T-M)-(M+1)k_1+y}{(T-M)-(M+1)m+y} \binom{k_1}{m} \cdot \left(\frac{(M+1)m-y}{T-M}\right)^m \left(1-\frac{(M+1)m-y}{T-M}\right)^{k_1-m}$$

図 4に, (1), 定理 1, 補題 1, 2 を用いて $\Pr(Q_i \le v)$ $(i = 0,1,\ldots,M)$ を計算した結果を示す. 確率分布関数が滑らかでないのは, 関数 $r_i(y,k_1)$ の和の範囲が $\left\lceil \frac{y}{M+1} \right\rceil$ に依るためである.

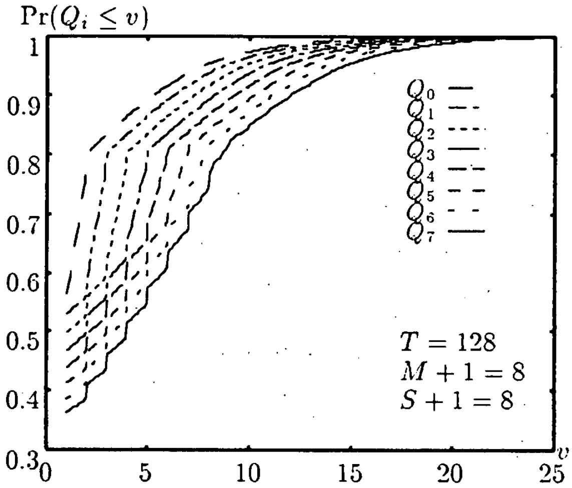

図 4: 確率分布 $\Pr(Q_{M-i} \le v)$

参考文献

[1] P. Humblet, et al., "Ballot Theorems Applied to the Transient Analysis of nD/D1 Queues", *IEEE/ACM Trans. Net.*, 1 (1993) 81–95.

[2] I. Cidon, et al., "Analysis of a statistical multiplexer with generalized periodic sources", *QUESTA*, 20 (1995) 139–159.