1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

2レベル多目的計画問題に対する対話型アルゴリズム

01702693　名古屋市立大学人文社会学部　矢野均　YANO Hitoshi

1　まえがき

本論文では、上位レベルと下位レベルにそれぞれ位置づけられる二人の意思決定者が、それぞれ複数個の互いに相競合する目的関数を持つような、2レベル多目的計画問題を考察対象とし、非協力関係のもとで定義されるStackelberg解の概念に対して、協力的関係を前提として定義される、$\boldsymbol{\alpha}_1$ レベルM-パレート最適解の概念を導入する。また、$\boldsymbol{\alpha}_1$ レベルM-パレート最適解の集合の中から満足解を導出するための対話型アルゴリズムを提案する。

2　2レベル多目的計画問題の定式化と解の概念

本論文では、各レベルの意思決定者が（単一目的ではなく）相競合する多目的関数を有する、2レベル多目的計画問題について考察する。

上位レベル意思決定者の多目的関数：

$$\min \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) = (f_{11}(\boldsymbol{x}), f_{12}(\boldsymbol{x}), \cdots, f_{1k_1}(\boldsymbol{x})) \quad (1)$$

下位レベル意思決定者の多目的関数：

$$\min \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) = (f_{21}(\boldsymbol{x}), f_{22}(\boldsymbol{x}), \cdots, f_{2k_2}(\boldsymbol{x})) \quad (2)$$

subject to

$$X = \{\boldsymbol{x} \in R^n \mid g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0,\ j = 1, \cdots, m\} \quad (3)$$

本論文で対象とする2レベル多目的計画問題における二人の意思決定者の間では、Stackelbergゲームにおけるような対立的な関係ではなく、下位レベルの意思決定者は上位レベル意思決定者の要求を受け入れ、上位レベルの意思決定者は下位レベルの意思決定者の満足度レベルを考慮するという、Lai(2) が考察した協調的な関係が成立しているものと仮定する。また、各意思決定者は各目的関数 $f_{1i}(\boldsymbol{x}), i = 1, \cdots, k_1, f_{2i}(\boldsymbol{x}), i = 1, \cdots, k_2$ に対して、あいまいな目標 (3) を持ち、各ファジィ目標は，メンバシップ関数 $\mu_{1i}(f_{1i}(\boldsymbol{x})), i = 1, \cdots, k_1$ $\mu_{2i}(f_{2i}(\boldsymbol{x})), i = 1, \cdots, k_2$ により規定することができるものとする。

各意思決定者が各目的関数に対するファジィ目標をメンバシップ関数で規定した後、各意思決定者はお互いのメンバシップ関数の競合状況を考慮した何らかの満足解をみつけなければならない。本論文では、Laiの2レベル計画問題に対する定式化の場合と同様に、上位レベルの意思決定者は「最適化」よりはむしろ「満足化」を望んでおり、各メンバシップ関数に対して、最低限度満たすべき満足度レベルとして、$\boldsymbol{\alpha}_1 = (\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1k_1})$ を主観的に設定するものとする。

$$\alpha_{1i} - \mu_{1i}(f_{1i}(\boldsymbol{x})) \leq 0,\ \ i = 1, \cdots, k_1 \quad (4)$$

この時、下位レベルの意思決定者は、上位レベル意思決定者の設定した制約条件 (4) を満たす範囲内で各メンバシップ関数 $\mu_{2j}(f_{2j}(\boldsymbol{x})), j = 1, \cdots, k_2$ を何らかの意味で最大化しなければならない。このような解の候補として、上位レベルの意思決定者が主観的に設定する満足度レベル $\boldsymbol{\alpha}_1$ に依存して定義される、$\boldsymbol{\alpha}_1$ レベルM-パレート最適解の概念を導入する。

[定義1]

2レベル多目的計画問題に対して、

$$\mu_{2i}(f_{2i}(\boldsymbol{x})) \quad \leq \quad \mu_{2i}(f_{2i}(\boldsymbol{x}*)),\ \ i = 1, \cdots, k_2$$

となるような $\boldsymbol{x} \in X(\boldsymbol{\alpha}_1)$ が存在しない時、$\boldsymbol{x}* \in X(\boldsymbol{\alpha}_1)$ を $\boldsymbol{\alpha}_1$ レベルM-パレート最適解という。

ここで、$X(\boldsymbol{\alpha}_1)$ は、次式で定義される、上位レベル意思決定者の設定する満足度レベル $\boldsymbol{\alpha}_1$ に依存して定義される実行可能集合である。

$$X(\boldsymbol{\alpha}_1) = \{\boldsymbol{x} \in X \mid \alpha_{1i} - \mu_{1i}(f_{1i}(\boldsymbol{x})) \leq 0, \ i = 1, \cdots, k_1\} \quad (5)$$

多目的計画問題に対するパレート最適解と同様、$\boldsymbol{\alpha}_1$ レベルM-パレート最適解は一般に無限個存在するので、下位レベルの意思決定者は $\boldsymbol{\alpha}_1$ レベルM-パレート最適解の集合の中から彼の満足解を導出しなければならない。満足解の候補は、各メンバシップ関数 $\mu_{2j}(f_{2j}(\boldsymbol{x})), j = 1, \cdots, k_2$ に対する希望水準（基準メンバシップ値）を主観的に設定すれば、次のミニマックス問題を解くことにより得られる。

$$\min_{\boldsymbol{x} \in X, x_{p+1} \in R^1} \quad x_{p+1} \quad (6)$$

subject to

$$\alpha_{1i} - \mu_{1i}(f_{1i}(\boldsymbol{x})) \le 0, \quad i = 1, \cdots, k_1 \tag{7}$$

$$\bar{\mu}_{2j} - \mu_{2j}(f_{2j}(\boldsymbol{x})) \le x_{p+1}, \quad j = 1, \cdots, k_2 \tag{8}$$

ミニマックス問題の最適解と $\boldsymbol{\alpha}_1$ レベル M-パレート最適解の間には次の関係が成立する。

[定理 1]

$\boldsymbol{x}^* \in X(\boldsymbol{\alpha}_1)$ が、2 レベル多目的計画問題の $\boldsymbol{\alpha}_1$ レベル型 M-パレート最適解であるための必要十分条件は、$\boldsymbol{x}^* \in X(\boldsymbol{\alpha}_1)$ が、ある基準メンバシップ値 $\bar{\boldsymbol{\mu}}_2 = (\bar{\mu}_{21}, \bar{\mu}_{22}, \cdots, \bar{\mu}_{2k_2})$ に対するミニマックス問題の一意な最適解となることである。

3 対話型アルゴリズム

さて、上位レベルの意思決定者が満足度レベル $\alpha_{1i}, i = 1, \cdots, k_1$ を設定し、下位レベルの意思決定者が基準メンバシップ値 $\bar{\boldsymbol{\mu}}_2 = (\bar{\mu}_{21}, \bar{\mu}_{22}, \cdots, \bar{\mu}_{2k_2})$ を設定すれば、ミニマックス問題を解くことにより、上位レベル意思決定者の設定した満足度レベルが保証され、しかも、下位レベルの意思決定者の要求にある意味で近い解 $\boldsymbol{x}^*$ が得られる。このとき、上位レベルの意思決定者は、得られた解に対する上位レベル意思決定者の満足度レベルと下位レベル意思決定者の満足度レベルのバランスに関する指標：

$$\delta = \frac{\min_{i=1,\cdots,k_2} \mu_{2i}(f_{2i}(\boldsymbol{x}^*))}{\min_{i=1,\cdots,k_1} \mu_{1i}(f_{1i}(\boldsymbol{x}^*))} \tag{9}$$

と、現在の満足度レベルの値を考慮して、現在の満足度レベル $\alpha_{1i}, i = 1, \cdots, k_1$ を変更すべきかどうか判断する。これに対して、下位レベルの意思決定者は、上位レベル意思決定者の要求を受け入れる一方、基準メンバシップ値を更新することにより、より望ましい解を探索することができる。ここで、メンバシップ値を更新する際の有益な情報と考えられる、各メンバシップ関数間のトレードオフ比は、得られた最適解 $\boldsymbol{x}^*$ が三つの条件（2 次の最適性の十分条件、1 次独立制約想定、狭義の相補性）(1) を満たす場合、ミニマックス問題の制約式 (8) に対応するラグランジュ乗数ベクトル $\boldsymbol{\lambda}_2 = (\lambda_{21}, \cdots, \lambda_{2k_2})$ を用いて次式で与えられる。

$$-\frac{\partial \mu_{2i}(f_{2i}(\boldsymbol{x}^*))}{\partial \mu_{2j}(f_{2j}(\boldsymbol{x}^*))} = \frac{\lambda_{2j}}{\lambda_{2i}} \quad i, j = 1, \cdots, k_2, \ i \neq j \tag{10}$$

以上より 2 レベル多目的計画問題に対して、上位レベルの意思決定者と下位レベルの意思決定者が互いに対話を繰り返しながら最終的に両者の満足解を導出するための対話型アルゴリズムを以下のように構成することができる。

[ステップ 1]

上位レベル意思決定者と下位レベル意思決定者は、各目的関数の最小値および最大値等の情報を考慮して、各目的関数に対するメンバシップ関数 $\mu_{1i}(f_{1i}(\boldsymbol{x})), i = 1, \cdots, k_1$ $\mu_{2i}(f_{2i}(\boldsymbol{x})), i = 1, \cdots, k_2$ を主観的に設定する。

[ステップ 2]

上位レベルの意思決定者は、各メンバシップ関数に対する初期満足度レベル $\alpha_{1i}, i = 1, \cdots, k_1$ を主観的に設定する。下位レベルの意思決定者は、各メンバシップ関数に対する初期基準メンバシップ値を $(\bar{\mu}_{21}, \bar{\mu}_{22}, \cdots, \bar{\mu}_{2k_2}) = (1, 1, \cdots, 1)$ と設定する。

[ステップ 3]

設定された満足度レベル $\alpha_{1i}, i = 1, \cdots, k_1$ と基準メンバシップ値に対するミニマックス問題を解く（もし、実行可能解が存在しない場合には、上位レベル意思決定者は、満足度レベルの値を適切に設定し直して、再度ミニマックス問題を解く）。対応する $\boldsymbol{\alpha}_1$ レベル M-パレート最適解、各メンバシップ関数値、メンバシップ関数間のトレードオフ比、さらに、上位レベル意思決定者の満足度と下位レベル意思決定者の満足度のバランスに関する指標 δ を計算する。

[ステップ 4]

上位レベルの意思決定者が現在のメンバシップ関数値とバランスに関する指標 δ に満足で、かつ、下位レベル意思決定者が現在のメンバシップ関数値に満足ならば終了する。そうでなければ、次のステップに進む。

[ステップ 5]

もし、上位レベルの意思決定者が、現在のメンバシップ関数値あるいはバランスに関する指標 δ に不満足な場合には、満足度レベルの値を更新して、ステップ 3 へ戻る。そうでなくて、もし、下位レベル意思決定者が現在のメンバシップ関数値に不満足な場合には、現在のメンバシップ関数値とトレードオフ比の情報を考慮して、基準メンバシップ値を更新しステップ 3 へ戻る。それ以外の場合、ステップ 4 へ戻る。

文　献

(1) 福島雅夫: "非線形最適化の理論", 産業図書, (1980).

(2) Lai, Y.-J.: "Hierarchical Optimization : A Satisfactory Solution", Fuzzy Sets and Systems, **77**, pp.321-335, (1996).

(3) Sakawa,M.: *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*, Plenum Press, New York, (1993).