1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

一般化包絡分析法と遺伝アルゴリズムによる多目的最適化の一手法

02991854 大阪大学 * 尹 禮分 YUN Yeboon
01401604 甲南大学 中山 弘隆 NAKAYAMA Hirotaka
01307844 大阪大学 谷野 哲三 TANINO Tetsuzo
香川大学 荒川 雅生 ARAKAWA Masao

1 はじめに

多目的意思決定問題においては目的空間におけるパレート値集合，すなわち，効率フロンティアを提示することにより，意思決定が非常にやりやすくなる．効率フロンティアを求めるための手法の一つとしてはGAを用いる方法が考案されているが，有名なものにランキング法 [4]，並列選択とパレート保存戦略にもとづくGAによる方法 [6] (以下では玉置他の方法と呼ぶ)，包絡分析法 (Data Envelopment Analysis，DEA) とGAを併用する方法 [1] などがある．しかし，ランキング法では滑らかな効率フロンティアを得ることが困難であり，また，玉置他の方法では，途中の世代において得られたパレート解の中で，最終的なパレート解にならないものが多く存在することがある．一方，DEAによる方法は効率フロンティアが凸になる問題にしか適用できない．そこで，本研究ではDEAとしてYun-Nakayama-Taninoによる一般化DEA(Generalized DEA, GDEA)[8] と遺伝アルゴリズム (Genetic Algorithms，GA) を併用する方法を提案する．GDEAは，CCRモデル，BCCモデル，FDHモデル [7] を含む一般的なDEAモデルで，これを用いることにより，従来の手法の長所を受け継ぎながら，問題点を改善することができることを示す．さらに，いくつかの例題を通してこの手法の有効性を示す．

2 GDEAとGAによる多目的最適化

1節で述べた方法がもっている問題点を改善するために，GDEAを用いた方法を提案する．まず，多目的最適化問題は一般に次のように定式化される．

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))^T \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \in X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_j(\boldsymbol{x}) \leqq 0,\ j = 1, \cdots, l\}. \end{aligned}$$

制約式のある場合には，ペナルティ関数を用いて，目的関数 $f_i(i = 1, \cdots, m)$ に対する拡大目的関数を次のように定義する．

$$F_i(\boldsymbol{x}) = f_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{l} p_j \times [P(g_j(\boldsymbol{x}))]^a \qquad (1)$$

ただし，p_j はペナルティ係数とし，a はペナルティ指数とし，$P(y) = \max\{y,\ 0\}$ とする．このとき，与えられた問題は各々の目的関数に対する拡大目的関数，式 (1) を最小化する問題になる．ここで，GDEAによる効率度を測るためには，ある個体 $\boldsymbol{x}^o$ に対する拡大目的関数 $F_i(\boldsymbol{x}^o)(i = 1, \cdots, m)$ を入力データと見なし，出力データを1とする．このとき，ある個体 $\boldsymbol{x}^o$ の効率度は，下の問題を解いたときの最適な Δ の値になる．淘汰はこの効率度をそのまま，適応度として行われる．すなわち，$\Delta^* = 0$ であれば，次世代に残し，そうではなければ淘汰する．

$$\begin{aligned} \max_{\Delta,\, \nu} \quad & \Delta \\ \text{s.t.} \quad & \Delta \leqq \tilde{d}_j - \alpha \sum_{i=1}^{m} \nu_i (F_i(\boldsymbol{x}^o) - F_i(\boldsymbol{x}^j)),\ j = 1, \cdots, p, \\ & \sum_{i=1}^{m} \nu_i = 1, \\ & \nu_i \geqq \varepsilon,\ i = 1, \cdots, m, \end{aligned}$$

ただし，$\tilde{d}_j = \max_{i=1,\cdots,m} \{\nu_i (-F_i(\boldsymbol{x}^o) + F_i(\boldsymbol{x}^j))\}$ であり，ε は小さい正数で，ここでは 10^{-6} とする．また，α は世代数に対する単調減少関数値とする．最初の段階では十分大きい α を与えることにより非パレート個体をより早く淘汰し，さらに，世代が進むにしたがい α を小さくすることにより効率フロンティアの非凸な部分を求めることができる．

3 例題–2目的関数の最適化問題

例題 1

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & (f_1(\boldsymbol{x}),\ f_2(\boldsymbol{x})) = (x_1,\ x_2) \\ \text{s.t.} \quad & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 - 4 \leqq 0, \\ & x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0. \end{aligned}$$

例題 2 [6]

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & (f_1(\boldsymbol{x}),\ f_2(\boldsymbol{x})) = (-2x_1 + x_2,\ x_1) \\ \text{s.t.} \quad & (x_1 - 1)^3 + x_2 \leqq 0, \\ & x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0. \end{aligned}$$

例題 3

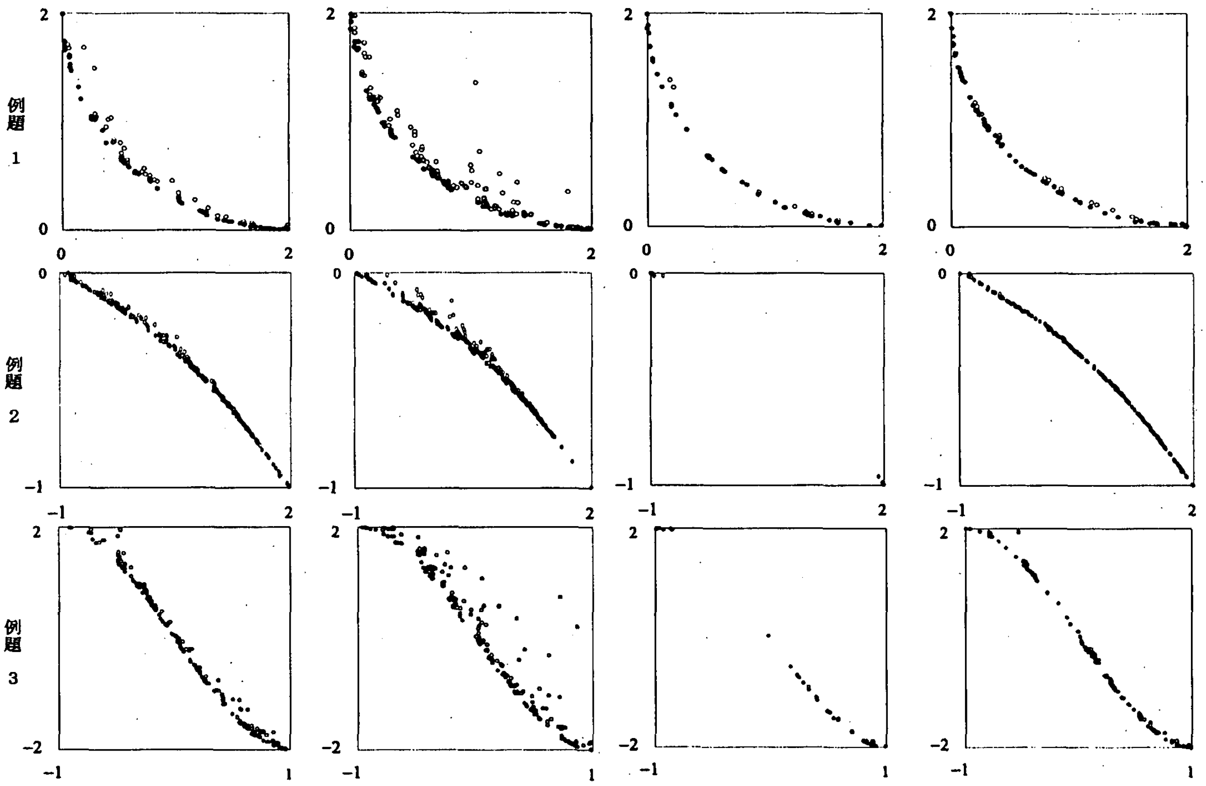
$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & (f_1(\boldsymbol{x}),\ f_2(\boldsymbol{x})) = (x_1,\ x_2) \\ \text{s.t.} \quad & x_1^3 - 3x_1 - x_2 \leqq 0, \\ & x_1 \geqq -1,\ x_2 \leqq 2. \end{aligned}$$

これらの例題に対して，本論文で提案した手法の有効性を示すために，ランキング法 [4]，玉置他の方法 [6]，DEAによる方法 [1] を用いて比較する．各方法による計算の結果を Fig. 1 に示す．横軸が f_1，縦軸が f_2 を表す．また，GDEAによる方法では，α は $10\times\exp(-0.2\times$ 世代数$)$ によって与える．それぞれ15世代，20世代，30世代までの各世代で求められたパレート個体を示す．これらを累積したものの中で最終的にパレート最適である個体を ● で，そうではないものは ○ で表す．

(a) ランキング法
得られたパレート個体の数は比較的多いが，その中には最終的なパレート解にならないものが少なからず存在する．また，Fig. 1 の (a) に見られるように滑らかな効率フロンティアを得にくい．

(b) 玉置他の方法
得られたパレート個体の数も多く，効率フロンティアもランキング法より滑らかである．しかしながら，Fig. 1 の (b) からわかるように，途中の世代のパレート個体の中で，最終的なパレート解にならない個体が多く存在する．

(c) DEAによる方法
Fig. 1 の (c) に示されるように得られたパレート個体の数は少ないが，効率フロンティアは滑らかである．しかし，非凸なフロンティアではくぼんだ部分が得られない．そのため，DEAによる方法は凸な効率フロンティアを求める問題にしか適用できないという短所がある．



(a) Ranking method　(b) Tamaki *et al.*' method　(c) DEA method　(d) GDEA method

Fig. 1: Efficient frontiers for examples

(d) GDEA による方法

本論文で提案した方法による結果は，Fig. 1 の (d) からもわかるように，凸な効率フロンティア，非凸な効率フロンティアのいずれにおいてもパレート個体の数は多く，得られた効率フロンティアも滑らかである．さらに，各世代において求められたパレート個体の多くが最終的なパレート解になることがわかる．

特に，ランキング法および玉置他の方法において途中の世代のパレート個体の中で，最終的なパレート解にならない個体が多く存在することには注目する必要がある．実際の問題にこれらの方法を適用する際，どれくらいの世代数まで計算をする必要があるかは前もってわからず，計算量の問題から適当に少ない世代数で打ち切ることが多い．このようなとき，少ない世代数で打ち切っても得られたパレート個体が正しい効率フロンティアにできるかぎり近いことが望まれる．この点，DEA や GDEA による方法は良好な結果を与えていることが上の例題からわかる．

4　結論

本研究では，多目的最適化問題における効率フロンティアを直接的に求めることを目指して，GDEA と遺伝アルゴリズムを用いた多目的最適化手法を提案した．この方法は，従来の方法がもっていた問題点を改善し，かつ従来の方法の長所を受け継いだ方法となっている．そのため，効率フロンティアをより早く，しかもより多くのパレート値を求めることができ，さらに，目的関数が非凸な場合にも適用できるようになっている．

参考文献

[1] M. Arakawa, I. Hagiwara, H. Nakayama and H. Yamakawa: Multiobjective Optimization Using Adaptive Range Genetic Algorithms with Data Envelopment Analysis; *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, pp. 1–9 (1998)

[2] M. Banker, A. Charnes, W.W. Cooper: Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis; *Management Science*, Vol. 30, pp. 1078–1092 (1984)

[3] A. Charnes, W.W. Cooper, E. Rhodes: Measuring the Efficiency of Decision Making Units, it European Journal of Operational Research, Vol.2, pp. 429–444 (1978)

[4] C.M. Fonseca and P.J. Fleming: Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization:Formulation, Discussion and Generalization; In *Proceeding of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms*, pp. 416–426 (1993)

[5] 中山 弘隆，谷野 哲三: 多目的計画法の理論と応用; 計測自動制御学会, pp. 42–50 (1994)

[6] 玉置 久，森 正勝，荒木 光彦: 遺伝アルゴリズムを用いたパレート最適解集合の生成法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 31, pp. 1185–1192 (1995)

[7] H. Tulkens: On FDH efficiency: Some Methodological Issues and Applications to Retail Banking, Courts, and Urban Transit; *Journal of Productivity Analysis*, Vol. 4, pp. 183–210 (1993)

[8] Y.B. Yun, H. Nakayama, T. Tanino: On Efficiency of Data Envelopment Analysis; *to appear in Proceeding of the 14th International Conference on Multiple Criteria Decision Making*, Charlottesville, Virginia, USA (1998)