ネットワークにおける，ファイル複製・転送総コストが最小となるための発信局設定について

岐阜大学工学部応用情報学科　01108953　　金子　美博　　KANEKO　Yoshihiro

1．はじめに

必要とされる情報ﾌｧｲﾙを伝達するﾓﾃﾞﾙにおいて，最小総ｺｽﾄでそのようなﾌｧｲﾙを転送する問題は，ﾈｯﾄﾜｰｸｼｽﾃﾑでの基本的な問題である．扱うﾓﾃﾞﾙでは，ﾌｧｲﾙを単に転送するだけでなく，どこでも任意にそのﾌｧｲﾙをｺﾋﾟｰできるものとする．

ﾌｧｲﾙ複製（または，ﾌｧｲﾙ転送）ﾈｯﾄﾜｰｸ N は，幾つかの点から他の点へそれぞれ必要部数のﾌｧｲﾙのｺﾋﾟｰを転送するような伝達方法のﾓﾃﾞﾙであり，点でのﾌｧｲﾙの複製ｺｽﾄと枝でのﾌｧｲﾙの転送ｺｽﾄが設定されている．N 上の最適なfile transferとは，各点で作るﾌｧｲﾙのｺﾋﾟｰの部数と各枝を転送させるﾌｧｲﾙのｺﾋﾟｰの部数を決定して，最小ｺｽﾄのﾌｧｲﾙ転送を実現させるものである．

本報告では，情報ﾌｧｲﾙの発信局が選択できる場合，最小ｺｽﾄの最適なfile transferを求める問題が，次数制約付最小木問題に帰着されることを示す．

2．準備

ﾊﾟｽ，根，葉，木，森等，本報告のｸﾞﾗﾌ理論に関する用語は，文献[1]に依る．また，正整数の集合を $\mathbb{Z}^+$ で表し，$\mathbb{Z}_0^+=\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ とする．有向ｸﾞﾗﾌ G 上の，各点vに対して，vに入る枝集合及びvから出る枝集合をそれぞれ $B_-(v)$ 及び $B_+(v)$ で表し，$|B_+(v)|$ を G におけるvでの（出）次数という．また，枝 (x, y) が G 上に存在すれば，xは G でのyの先行点という．

以下で考察するﾈｯﾄﾜｰｸﾓﾃﾞﾙ N は，ﾌｧｲﾙ複製ﾈｯﾄﾜｰｸと呼ばれるものであり，$N=(V, B, s, c_V, d, c_B)$ で表される（表1）．N の内部を転送される情報は，ﾌｧｲﾙの形で書かれ，記号 J で表される．

表1．ﾈｯﾄﾜｰｸﾓﾃﾞﾙ（ﾌｧｲﾙ複製ﾈｯﾄﾜｰｸ）

V	点集合	B	枝集合
s	V上のﾊﾟﾗﾒｰﾀ，ﾋﾞｯﾄ値，$s(v)=1$ ならば，点vは発信局		
c_V	V上のﾊﾟﾗﾒｰﾀ，正の値，各点で J のｺﾋﾟｰを1部作るのに必要なｺｽﾄ（点ｺｽﾄ）		
d	V上のﾊﾟﾗﾒｰﾀ，正または0の値，各点で必要な J のｺﾋﾟｰの部数（点の需要値）		
c_B	B上のﾊﾟﾗﾒｰﾀ，正の値，各枝で J のｺﾋﾟｰを1部転送するのに必要なｺｽﾄ（枝ｺｽﾄ）		

発信局の集合を S，すなわち，$S=\{v\in V \mid s(v)=1\}$ とする．また，$U=\{v\in V \mid d(v)=1\}$ とする．

B 上の関数 f に対して，ﾊﾟｽP上の各枝eが $f(e)>0$ を満たすならば，Pは f 連結であるという．2点u, vに対して，u-vﾊﾟｽPのｺｽﾄを，P上の全ての枝のｺｽﾄの総和とする．ｺｽﾄが最小であるu-vﾊﾟｽを，最小ｺｽﾄu-vﾊﾟｽと呼び，そのｺｽﾄを $c_{u,v}$ で表す．

［定義1］　点集合 M を $M=\{x\in V \mid$ 点xが $V\setminus\{x\}$ 上の各点yに対して，$c_V(x)<c_V(y)+c_{y,x}$ を満たす．$\}$ とする．また，V の各点vに対して，$H(v)=\{w\in V \mid w$ は，V の任意の点xに対して，$c_V(w)+c_{w,v}\leq c_V(x)+c_{x,v}$ を満たす．$\}$ とする．□

M と関数 H には次のような関係がある．

［補題1］[3]　V の各点vに対して，$H(v)\cap M\neq\phi$ が成り立つ．また，$H(m)=\{m\}$ が成り立つための必要十分条件は，$m\in M$ が成り立つことである．□

以降では，V 上の関数hは，各点vに対して，$h(v)\in H(v)\cap M$ を満たすものとする．

本報告で扱う N は，

（仮定1）　$(x, y)\in B$ ならば，$(y, x)\in B$ かつ $c_B(y, x)=c_B(x, y)$．
（仮定2）　$M\subseteq U$．
（仮定3）　$S\subseteq M$．

を満たすものとする．定義されるfile transferを通して，V の各点vから $d(v)$ 部の J のｺﾋﾟｰが取り出される．

［定義2］　N において，$\phi: V\rightarrow\mathbb{Z}_0^+$ である関数 ϕ 及び $f: B\rightarrow\mathbb{Z}_0^+$ である関数fが

(C1)
$$s(v)+\phi(v)+\sum_{e\in B_-(v)} f(e) = \sum_{e\in B_+(v)} f(e) + d(v) \qquad (v\in V),$$

を満たし，かつ，

(C2) $\phi(v)>0$ である点vに対して，ある発信局からvへ f 連結なﾊﾟｽが存在する．

を満たすならば，(ϕ, f) を N のfile transferと呼ぶ．file transfer $D=(\phi, f)$ のｺｽﾄ $C(D)$ を，

$$C(D)=\sum_{v\in V} c_V(v)\cdot\phi(v)+\sum_{e\in B} c_B(e)\cdot f(e),$$

とする．ｺｽﾄが最小のfile transferを<u>最適</u>と呼ぶ．□

一般的な N に対して，最適なfile transferを求める問題は NP 困難である[2]．多項式時間のｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑで最適なfile transferが求められるような特殊な N のｸﾗｽ（例えば，上の仮定(2)）も知られている[3]．

本報告では，次のような問題を考察する．

［問題］　与えられた正の整数 $k\ (\leq |M|)$ に対して，k個の発信局が選択できるﾌｧｲﾙ複製ﾈｯﾄﾜｰｸ N_k を考える．ｺｽﾄが最小となる最適なfile transferを得るためには，k個の発信局をどのように設定すればよいか？　□

上の問題の解となる，k個の発信局を，最適な発信局集合と呼ぶ．$k=1$の場合，最適な発信局は，点ｺｽﾄ最小の点であることが知られている．[4]

3．固定された発信局でのfile transferの構成[3]

以降では，ｸﾞﾗﾌ構造がNと同じであり，各点vの重みが$\alpha(v)$であり，各枝eの重みが$\beta(e)$であるﾈｯﾄﾜｰｸをNのﾈｯﾄと呼び，$N(\alpha,\beta)$で表す．

N上のﾊﾟｽ(多重)集合$\mathbb{P}$に対して，重ね合わせﾈｯﾄ$N(\alpha,\beta)$は次のように定義され，$N(\mathbb{P})$で表される．

(N1)点集合及び枝集合は，それぞれV及びBである．

(N2)各点vの重み$\alpha(v)$は，vを始点とする，$\mathbb{P}$上のﾊﾟｽの総数から，vを終点とする，$\mathbb{P}$上のﾊﾟｽの総数を引いたものとする．ただし，vを始点もしくは終点とするﾊﾟｽが$\mathbb{P}$上に存在しなければ，$\alpha(v)=0$とする．

(N3)各枝eの重み$\beta(e)$は，$\mathbb{P}$において，eを含むﾊﾟｽの総数とする．ただし，eを含むﾊﾟｽが存在しなければ，$\beta(e)=0$とする．

次に，Sが固定された場合，Nでの最適なfile transferを求めるのに必要な定義及び補題を紹介する．

[定義3][3]　仮定(1)，(2)を満たすNにおいて

(CF)　点集合がUであり，根集合がSであり，$U\backslash M$上の各点uは，点$h(u)$を先行点とする葉である，

を満たす有向森をTとする．次に，Tの各枝(x,y)に対して，最小ｺｽﾄx-yﾊﾟｽPを，$y\in M$ならば，1個持ち，そうでなければ，$d(y)$個持つﾊﾟｽの集合を$\mathbb{P}_U$とし，$N(\alpha,\beta)=N(\mathbb{P}_U)$とする．$V$上の関数$\alpha'$を

$$\alpha'(u)=\begin{cases}\alpha(u)+d(u)+s(u)-1 & (u\in M),\\ 0 & (u\in V\backslash M),\end{cases}$$

とする．ﾈｯﾄ$N(\alpha',\beta)$を，Tから導かれるﾈｯﾄと呼ぶ．□

[補題2][3]　Nに対して，性質(CF)を満たす有向森をTとすると，Tから導かれるﾈｯﾄ$N(\alpha',\beta)$は，Nのfile transferである．また，枝集合T_1を

$$T_1=\{(x,y)\in B(T)\mid y\in M\},$$

とし，$D_T=N(\alpha',\beta)$とすると，

$$C(D_T)=\sum_{u\in V}\{c_V(h(u))+c_{h(u),u}\}\cdot d(u)-\sum_{m\in S}c_V(m)+\sum_{(x,y)\in T_1}\{c_{x,y}-c_V(y)\}\quad(1)$$

である．□

[補題3][3]　仮定(1)，(2)を満たすNの任意のfile transfer Dに対して，性質(CF)を満たす有向森Tから導かれるfile transfer D_Tで，$C(D)\geqq C(D_T)$であるものが存在する．□

この補題より，最適なfile transferを求めるためには，式(1)が最小となるようにT_1を選べばよいことがわかる．このようなT_1を求めるためには次の随伴ﾈｯﾄが便利である．

[定義4]　仮定(1)，(2)を満たすNにおいて，以下のようにNの随伴ﾈｯﾄを定義し，ANで表す．

(1)　ANは，$M\cup\{s_0\}$($s_0\notin V$)を点集合とする完全ｸﾞﾗﾌの構造である．

(2)　ANの各辺$e=(x,y)$の重み$w(e)$は

$$w(e)=\begin{cases}c_V(x)+c_{x,y}+c_V(y) & (x,y\in M)\\ 2c_V(m) & (\text{otherwise},\ m\in M)\end{cases}$$

とする．□

このAN上の木Tの重みを$w(T)$とすると，式(1)より，

$$C(D_T)=w(T)+2\sum_{m\in M}c_V(m),$$

が得られる．ただし，Tでのs_0の出次数は$|S|$である．この式の第2項は定数であるため，TがANにおいて最小木であることが最適なfile transferが最小となるための十分条件である．従って，次の命題が得られる．

[命題1]　点s_0の次数がkであるAN上の最小木において，s_0に隣接する集合をS'とすると，仮定(1)-(3)を満たすN_kに対して，S'は最適な発信局集合である．□

次数制約付き最小木問題を解くための方法は[5]において知られている．[3]，[5]より，$O(|V|^3)$の手間で最適な発信局が求められる．

4．むすびと今後の課題

本報告では，ﾌｧｲﾙ複製ﾈｯﾄﾜｰｸにおける，最小ｺｽﾄの最適なfile transferを得るための発信局設定問題が，次数制約付き最小木問題を部分問題として含むことを示した．今後，発信局に対する条件を緩めた場合，最適な発信局がどのように変わるか等，について考察する．

参考文献

[1] 伊理，白川，梶谷，篠田：演習ｸﾞﾗﾌ理論，ｺﾛﾅ社(1983)．

[2] Y.Kaneko & S.Shinoda, "The complexity of an optimal file transfer problem," IEICE.Trans. E82-A. No2, pp.394-397, Feb.1999.

[3] Y.Kaneko, K.Suzuki, S.Shinoda & K. Horiuchi, "A synthesis of a forest-type optimal file transfer on a file transmission net with source vertices," IEICE Trans. E78-A, No.6, pp.671-679, June 1995.

[4] Y.Kaneko, J.Zhang, S.Shinoda & K.Horiuchi, "On an optimum file transfer on a file transmission net," IEICE Trans. E76-A, No.7, pp.1133-1138, Jul.1993.

[5] H.Gabow, "A good algolithm for smallest spanning trees with a degree constraint," Networks 8, 201-208 (1978).