有向グラフ点探索アンチマトロイドの禁止マイナーによる特徴付け

01402860 東京大学 中村政隆*

E を有限非空集合、$\mathbb{F}$ をその部分集合の族として、以下が満たされるとき、これをアンチマトロイドといい、その元を可能集合 (feasible set) と呼ぶ。

(1) $\emptyset \in \mathbb{F}$,

(2) $X \in \mathbb{F}$, $X \neq \emptyset$ ならば ある $x \in X$ があって $X - \{x\} \in \mathbb{F}$,

(3) $X, Y \in \mathbb{F}$ ならば $X \cup Y \in \mathbb{F}$.

アンチマトロイドは、木の点/辺シェリング、poset のシェリング、凸体のシェリングなどの様々なシェリングやグラフの点探索/辺探索などの探索 (サーチ) に伴って定義できる。

$G = (V \cup \{r\}, E)$ を根 r を持つ有向グラフとする。グラフ G 上の根 r を始点とする初等的なパスをここでは単にパスと呼ぶことにする。パス $P = r_0 v_1 \cdots v_k$ $(v_0 = r, v_i \in V\ 1 \leq i \leq k)$ に対して $\partial P = \{v_1, \ldots, v_k\}$ とおく。すると、∂P という集合とそれらの合併集合の全体は、V の上のアンチマトロイドになる。これを根つき有向グラフ G の点探索アンチマトロイドと呼ぶ。

アンチマトロイドの可能集合の組 $A, B \in \mathbb{F}$、$A \subseteq B$ に対して、

$$(\mathbb{F}|B)/A = \{X \subseteq B \setminus A \ : \ A \cup X \in \mathbb{F}\}$$

で定まる $B \setminus A$ 上のアンチマトロイドを $\mathbb{F}$ のマイナーという。点探索アンチマトロイドのクラスは、このマイナーを取る操作で閉じている。ここで、$S_5 = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}, \{x,y,z\}\}$ という３点集合 $E = \{x, y, z\}$ の上のアンチマトロイドは、どんな有向グラフの点探索アンチマトロイドにもならないことが簡単に確認できる。ゆえに、S_5 に同型なマイナーを持たないことが、点探索アンチマトロイドになるための自明な必要条件になるが、これが十分条件でもあることが示せる。

まず、必要な定義と補題を準備する。$X \setminus e \in \mathbb{F}$ となる元 $e \in X$ が一意に存在するような可能集合 $X \in \mathbb{F}$ をパス集合と呼ぶ。

Lemma 1 $\mathbb{F}$ を S_5 をマイナーとして含まないアンチマトロイドとする。$X \in \mathbb{F}$ をパス集合とするれば、X の元の順列 $x_1 x_2 \cdots x_n$ で各 $X_i = \{x_1, \ldots, x_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ が $\mathbb{F}$ の可能集合になるようなものが一意に存在する。かつこのとき、各 X_i はパス集合になる。

$\mathbb{F}$ を有限集合 V 上のアンチマトロイドで、S_5 をマイナーとして含まないものとする。これから、$V \cup \{r\}$ を点集合とする根つき有向グラフ $G[\mathbb{F}]$ を次のように定義する：$\mathbb{F}$ 中の各パス集合 X に対し、補題１で定

*東京大学総合文化研究科広域システム科学系 nakamura@klee.c.u-tokyo.ac.jp

まる元の順列を $x_1x_2\cdots x_n$ とするとき、辺 (r,x_1) と辺 (x_i,x_{i+1}) $(i=1,\ldots,n-1)$ をグラフ $G[\mathbb{F}]$ の辺として加える。するとこのグラフの定める点探索アンチマトロイドがもとのアンチマトロイドに一致することが示せる。つまり、

Theorem 1 $\mathbb{F}$ を S_5 に同型なマイナーを含まないアンチマトロイドとする。これから上で定義される有向グラフを $G[\mathbb{F}]$ として、このグラフの定める点探索アンチマトロイドを $\mathbb{F}(G[\mathbb{F}])$ とすれば、

$$\mathbb{F}(G[\mathbb{F}])=\mathbb{F}$$

これより自明に、

Corollary 1 アンチマトロイドが有向グラフの点探索アンチマトロイドになるための必要十分条件は、それが S_5 に同型なマイナーを含まないことである。

これ以外の禁止マイナー型の特徴付けとしては、poset シェリングアンチマトロイドのものがあり、次が成立する：アンチマトロイドが poset シェリングアンチマトロイドになるための必要十分条件は、それが S_7 に同型なマイナーを含まないことである。ここで、$S_7=\{\emptyset,\{x\},\{y\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\},\{x,y,z\}\}$ である。

参考文献

[1] M. Aigner, *Combinatorial Theory*, Springer, 1979.

[2] B. L. Dietrich, "Matroids and antimatroids – a survey", *Discrete Mathematics* 78 (1989), 223 - 237.

[3] P.H. Edelman and R.E. Jamison, "The theory of convex geometry", *Geometriae Dedicata* 19 (1985), 247-270.

[4] B. Korte, L. Lovász and R. Shrader, *Greedoids,* Springer-Verlag, 1980.