1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

線形相補性問題に対するCHKS関数を用いたプレディクタ・コレクタ型平滑法の計算複雑度解析と計算機実験

筑波大学 社会工学研究科 *堀田 敬介
筑波大学 社会工学系 吉瀬 章子

1 はじめに

標準的な線形相補性問題は, 行列 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ とベクトル $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ が与えられた時,

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{2n} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{y} = M\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}, && (1) \\ & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}), && (2) \\ & x_i y_i = 0, (i \in N), && (3) \\ \text{where} \quad & N := \{1,\dots,n\}. \end{aligned}$$

として定義される. M が非負定値の時, すなわち, 任意のベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^T M(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \geq 0$ が成り立つ時, この問題は単調線形相補性問題と呼ばれる.

この問題を解く解法の一つとして近年盛んに研究されている平滑法がある. この方法は線形相補性問題の非負条件 (2) と相補性条件 (3) を等価な等式条件で置き換え (1) の等式条件と合わせてニュートン・ラプソン法で解くというものである.

具体的には, 線形相補性問題の解析的中心

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{y} = M\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}, && (4) \\ & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}), && (5) \\ & x_i y_i = \mu^2, (i \in N). && (6) \end{aligned}$$

を考えたとき, (5), (6) を満たす点 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が $\mu > 0$ に対し等式 $\phi(\mu, x_i, y_i) = 0$ $(i \in N)$ を満たし, 逆も成り立つ, という性質を満たす関数 ϕ を用いる. この ϕ を近似相補関数と定義する. この性質を満たす近時相補関数の一つ Chen-Harker-Kanzow-Smale 関数 $\phi(\mu, x_i, y_i) := x_i + y_i - \sqrt{(x_i - y_i)^2 + 4\mu^2}, (i \in N)$ を用いて, アルゴリズムを構成する. 上記等式と (4) を合わせた等式のニュートン方程式は以下のようになり

$$\begin{pmatrix} -M & I \\ D_x & D_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{x} \\ \Delta \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{\Phi} \end{pmatrix} \quad (7)$$

where

$$D_x = diag\left\{1 - \frac{\bar{x}_i - \bar{y}_i}{\sqrt{(\bar{x}_i - \bar{y}_i)^2 + 4\bar{\mu}^2}}\right\},$$

$$D_y = diag\left\{1 + \frac{\bar{x}_i - \bar{y}_i}{\sqrt{(\bar{x}_i - \bar{y}_i)^2 + 4\bar{\mu}^2}}\right\},$$

$$\Phi = [\cdots, \phi(\mu, x_i, y_i), \cdots]^T \in \mathbb{R}^n.$$

コレクタ・ステップにおいてこの方向 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y})$ を使って ϕ の値を下げる. 以上が, 我々が提案する, CHKS 平滑関数を用いたプレディクタ・コレクタ型平滑法である. また, その計算複雑度を解析し, 計算機実験によるパフォーマンスの評価を行う.

解析を行うにあたり, 以下の仮定を置く.

仮定

(1) 線形相補性問題は単調である.

(2) 線形相補性問題には内点実行可能解が存在する.

2 アルゴリズム

我々の提案するアルゴリズムは, 近傍を

$$\mathcal{N}(\alpha) = \{(\mu, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) | \boldsymbol{y} = M\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}, \Phi < 0, ||\Phi|| \leq \alpha\mu\}$$

と定義した時に, プレディクタ・ステップにおいて外側の近傍 $\mathcal{N}(\alpha + 2\beta)$ 内を動きつつ μ の値を下げ, コレクタ・ステップにおいて内側の近傍 $\mathcal{N}(\alpha)$ に入るように ϕ の値を下げることを交互に行い解へと到達する反復解法である.

Step 0: 初期化 $\epsilon > 0, k := 0, \beta \in (0,1),$
$\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y}^0 := M\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q},$

$\mu^0 > 0$ s.t. $(\mu^0)^2 > \max\{0, x_i^0 y_i^0 (i \in N)\}$,
$\phi(\mu^0, x_i^0, y_i^0)(i \in N)$ を計算,
$\alpha > 0$ s.t. $||\Phi(\mu, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|| \le \alpha\mu^0$.

Step 1: 収束判定 $\mu^k < \epsilon / \max\{1, \alpha\}$ なら終了.
そうでなければ Step2 へ.

Step 2: プレディクタ $(\mu^{k+1}, \boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k) \in \mathcal{N}(\alpha + 2\beta)$ となる μ^{k+1} を見つける.

Step 3: コレクタ $p := 0$, $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0) := (\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k)$, $\Phi^0 := \Phi(\mu, \boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$.

step 3-1 : $||\Phi^p|| \le \alpha\mu$ ならば step3-3 へ,
そうでなければ (7) によりニュートン方向 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y})$ を計算し, 直線探索でステップサイズ θ^p を決める.
$(\boldsymbol{x}^{p+1}, \boldsymbol{y}^{p+1}) := (\boldsymbol{x}^p, \boldsymbol{y}^p) + \theta^p(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y})$,
Φ^{p+1} を計算.

step 3-2 : $p := p + 1$ として step 3-1 へ.

step 3-3 : $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}) := (\boldsymbol{x}^{p+1}, \boldsymbol{y}^{p+1})$,
Φ^{k+1} を計算.

Step 4 :
$k := k + 1$ として Step 1 へ.

3 計算複雑度解析

仮定のもとで, 以下のことを示した. 各結果の中で用いる $\bar{\gamma}$ は初期点と問題のサイズに依存する数である.

補題 (1) 各反復における **Step 2** において

$$\mu^{k+1} \le (1 - \frac{\beta}{\sqrt{n}})\,\mu^k.$$

である.
(2) **Step 3** の各反復 p において

$$||\Phi^{p+1}|| \le \max\left\{1 - \frac{(1-\frac{\beta}{\sqrt{n}})^5 \mu^4}{288\bar{\gamma}^4(\alpha + 2\beta)}, \frac{1}{2}\right\} ||\Phi^p||$$

である.

定理 (1) 各反復 k において, **Step 3** は高々

$$\left\lceil 2\max\left\{\frac{144\bar{\gamma}^4(\alpha+2\beta)}{(1-\frac{\beta}{\sqrt{n}})^5(\mu^k)^4}, 1\right\} \log\frac{(1-\frac{\beta}{\sqrt{n}})\alpha}{\alpha + c\beta}\right\rceil$$

回で終わる.
(2) アルゴリズムの総反復回数は, 高々

$$\left\lceil \log\frac{(1-\frac{\beta}{\sqrt{n}})\alpha}{\alpha+2\beta}\right\rceil \cdot \left\{\left\lceil\frac{288\bar{\gamma}^4(\alpha+c\beta)}{(1-\frac{\beta}{\sqrt{n}})^9\{1-(1-\frac{\beta}{\sqrt{n}})^4\}\epsilon^4}\right\rceil + 3\left(\left\lceil\log\frac{\epsilon}{\mu^0}\right\rceil + 1\right)\right\}$$

回である.

系 このアルゴリズムは

$$\mathcal{O}\left(\frac{\bar{\gamma}^4\sqrt{n}}{\epsilon^4} + \log\frac{\epsilon}{\mu^0}\right)$$

で終了する. ただし, log の底は $1 - \frac{\beta}{\sqrt{n}}$.

4 計算機実験

計算機実験結果については, 発表時に報告する.

5 今後の課題

今後の課題としては以下のことが挙げられる. $\bar{\gamma}$ の評価を行い, CHKS を用いた平滑法が多項式時間で終了するかどうか. また, 他の近似相補関数, 例えば Smoothed Fisher-Burmeister 関数などを用いた場合の, 計算複雑度解析などである.

参考文献

[1] J.Burke and S.Xu, *"The Global Linear Convergence of a Non-Interior Path-Following Algorithm for Linear Complementarity Problems,"* Mathematics of Operations Research, Vol.**7**, pp.3-25, 1997

[2] K.Hotta and A.Yoshise, *"Global Convergence of a Class of Non-Interior-Point Algorithms Using Chen-Harker-Kanzow Functions for Nonliner Complementarity Problems,"* to apper in Mathematical Programming

[3] K.Hotta, M.Inaba and A.Yoshise, *"A Complexity Analysis of a Smoothing Method Using CHKS-functions for Monotone Linear Complementarity Problems,"* Discussion Paper Series, No.807, Univ. or Tsukuba, Dec. 1998.

[4] C.Kanzow, *"Some Noninterior Continuation Methods for Linear Complementarity Problems,"* SIAM J.Matrix Anal. Appl. Vol.**17**, No.4, pp.851-868, October 1996.