探索努力配分問題へのD.C.プログラミングの一適用例

02004810　防衛大学校　*海老澤　文衛　EBISAWA　Bune
01000890　防衛大学校　飯田　耕司　IIDA　Koji
01504810　防衛大学校　宝崎　隆祐　HOHZAKI　Ryusuke

1. はじめに

大域的最適化の一手法であるD.C.(Differences of two Convex functions)プログラミングは，目的関数が凸関数の差で表される制約条件付き最適化問題，いわゆるD.C.問題を解くための手法である．D.C.問題は新しい変数を導入することにより凹最小化問題に変形でき，この問題を解くためにこれまで提案されてきた様々な手法[1]が使用できる．また，目的関数の２階偏導関数が連続な場合には多くの問題がD.C.問題に帰着でき，その応用範囲が広いのにもかかわらず，D.C.プログラミングによる適用例はこれまであまり報告されていない．本研究では，ネットワーク上の移動目標物に対する探索努力配分問題[2]に，D.C.プログラミングの２つの手法 Outer Approximation及び Prismatic Branch and Bound[3]を適用した例を報告する．

2. モデルの前提

モデルの前提は以下のとおりである．

(1) 探索空間はm個のノードの集合Nとn個のアークの集合Aを持つネットワーク$G=(N,A)$である．ノードは$i=1,\cdots,m$で，アークは$k=1,\cdots,n$で番号付けられている．

(2) 目標物はG上の始点ノードsから終点ノードeへ至る閉路ではない複数の経路のうちから１つを選択して移動する．経路lはn_l個のアークからなり，その上を目標物が移動するアーク番号の順番により$l=\{l(1),l(2),\cdots,l(n_l)\}$と表わされる．目標物が選択しうる経路全体の集合を$L$とする．目標物が経路$l$を選ぶ確率$\pi_l$，$0<\pi_l<1$，$\sum_{l\in L}\pi_l=1$，は探索者に既知とする．

(3) 探索者はネットワーク上のアークに探索努力を配分して目標物を待ち受け，探知に努める．探索努力の総量はMであり，それを任意に分割してアークに配分できる．アークkに配分する探索努力量をφ_k，探索者の探索計画を$\Phi=\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$で表す．

(4) アークkに配分した探索努力φ_kにより，ここを通る目標物は，確率$p_k=1-\exp(-\alpha_k\varphi_k)$（ただし$\alpha_k>0$）で探知される．アーク$k$で目標物を探知すれば，探索者は価値$V_k$を獲得するが，単位探索努力量あたり$C_k$の探索コストを消費する．

(5) 探索者は，期待利得（獲得する目標価値から探索コストを引いた値の期待値）を最大にすることを目的とする．

3. 定式化とD.C.問題

以上の仮定から，期待利得は次式となる．

$$R(\Phi)=\sum_{l\in L}\pi_l\sum_{i=1}^{n_l}\left[V_{l(i)}\exp\left(-\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{l(j)}\varphi_{l(j)}\right)\cdot p_k\right]-\sum_{k=1}^{n}C_k\varphi_k$$

したがって，問題は以下のように定式化される．

$$P_0:\ \max_{\varphi}R(\Phi),$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{k=1}^{n}\varphi_k\le M\ ,$$
$$\varphi_k\ge 0,\quad k=1,\cdots,n\ .$$

さらに目的関数$R(\Phi)$は２つの凸関数$g(\Phi)$，$f(\Phi)$の差に変形できる．

$$R(\Phi)=g(\Phi)-f(\Phi),$$
$$g(\Phi)\equiv\sum_{l\in L}\pi_l\sum_{i=1}^{n_l}\left[V_{l(i)}\exp\left(-\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{l(j)}\varphi_{l(j)}\right)\right],$$
$$f(\Phi)\equiv\sum_{l\in L}\pi_l\sum_{i=1}^{n_l}\left[V_{l(i)}\exp\left(-\sum_{j=1}^{i}\alpha_{l(j)}\varphi_{l(j)}\right)\right]+\sum_{k=1}^{n}C_k\varphi_k\ .$$

ゆえに，問題P_0はD.C.問題である．

ここで変数tを新たに導入すれば，問題P_0は凸集合上における次の凹関数の最小化問題P_1に帰着できる．

$$P_1 : \min_{(\Phi,t)} F(\Phi,t),$$
$$\text{s.t.} \quad (\Phi,t)\in D.$$

ただし，

$$F(\Phi,t) \equiv t - g(\Phi),$$
$$D \equiv \left\{(\Phi,t)\in \mathbf{R}^{n+1} \middle| f(\Phi)-t \le 0, \sum_{k=1}^{n}\varphi_k \le M, \varphi_k \ge 0, 0 \le t \le T\right\},$$

であり，Tは$\max_{(\Phi,t)\in D} F(\Phi,t) << T$となる十分大きな正数とする．

4. アルゴリズムの概要

アルゴリズムは反復解法であり，反復kにおける目的関数の上界をγ^k，下界をμ^kで表す．

4.1 An Outer Approximation Method

初期設定：$D \subset P^0$となる多面体P^0を構成し，その端点の集合$V(P^0)$を計算する．$\gamma^0 = \infty$，$k=1$とする．

反復k　：$P^0 \supset P^1 \supset \cdots P^k \cdots \supset D$となるように多面体$P^k$を構成し，$V(P^k)$及び目的関数の下界$\mu^k = \min\{F(V(P^k))\}$を計算する．また，多面体$P^k$の構成過程で見つかる実行可能解$u^k$より$\gamma^k = \min\{\gamma^{k-1}, F(u^k)\}$を計算する．

停止条件：収束条件$|\gamma^k - \mu^k| < \varepsilon$が十分小さい$\varepsilon$に対して成り立てば反復を停止，そうでなければ$k=k+1$として反復を繰り返す．

4.2 A Prismatic Branch and Bound Method

単体$S_0 \equiv \left\{\Phi\in\mathbf{R}^n \middle| \sum_{k=1}^{n}\varphi_k \le M, \varphi_k \ge 0\right\}$を底とするプリズム（角柱）を$P(S_0) \equiv \{(\Phi,t)\in\mathbf{R}^{n+1} | \Phi\in S_0, 0 \le t \le T\}$とする．また，反復$k$における分割されたプリズムの集合を$\Im^k$，プリズム$P\in\Im^k$における目的関数の局所的な下界を$\mu(P)$とする．

初期設定：$\Im^0 = \{P(S_0)\}$，$\gamma^0 = \infty$とし，$\mu(P(S_0))$を計算する．$k=1$とする．

反復k：

step.k.1: $\Im^{k-1}$から$\mu(P) \ge \gamma^{k-1}, P\in\Im^{k-1}$となるプリズム$P$を削除し，残りの集合を$\Im^k$とする．

step.k.2: $P^{\min} = \arg\min(\mu(P) \mid P\in\Im^k)$を決定し，部分プリズムに分割する．$\Im^k$の中で$P^{\min}$をこの分割したプリズムに入れ換える．

step.k.3: 分割したプリズムそれぞれについて，下界$\mu(P)$を計算する．

step.k.4: $\mu^k = \min\{\mu(P) \mid P\in\Im^k\}$を計算する．また，下界の計算及びプリズムの分割過程で見つかる実行可能解u^kより$\gamma^k = \min\{\gamma^{k-1}, F(u^k)\}$を計算する．

停止条件：$\Im^k = \{\phi\}$となるか収束条件$|\gamma^k - \mu^k| < \varepsilon$が満たされれば反復を停止，そうでなければ$k=k+1$として反復を繰り返す．

上記の２つのアルゴリズムにおいて，問題P_1の最適値F^*に対し，$\mu^k \le \mu^{k+1} \le F^* \le \gamma^{k+1} \le \gamma,^k\ k=0,1,\cdots$となることが証明され，問題の最適値が誤差$\varepsilon$の精度で求まる．

5. 数値例

アルゴリズムの詳細及び数値例については発表の当日に報告する．

参考文献

[1] H. P. Benson: Deterministic algorithm for constrained concave minimization : A unified critical survey. *Naval Research Logistics*, **43** (1996) 765-795.

[2] R. Hohzaki, K. Iida and M. Teramoto: Optimal search for a moving target with no time information maximizing the expected reward. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **42** (1999) 167-179.

[3] R. Horst, P. M. Pardalos and N. V. Thoai : *Introduction to Global Optimization* (Kluwer Academic Publishers , London , 1995).