1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

探索努力の局所有効性を緩和した最適探索努力配分

02202860　防衛大学校　*坂元　忠彦　SAKAMOTO Tadahiko
01000890　防衛大学校　飯田　耕司　IIDA Koji

1　はじめに

本研究では，一定の総探索努力量の制約下で，目標探知確率を最大にする最適努力配分を求める．この種の問題は Koopman の研究以来，多くの研究が行われてきた [1, 2, 3]．これまでの研究では，「目標探知確率は，目標存在地点の探索努力密度の関数である」という「探索努力の局所有効性」が一貫して仮定されてきた．本研究ではこの仮定を緩和して，目標地点 y から離れた地点 x の探索努力によっても，離隔距離 $|x-y|$ に応じて目標発見の可能性がある現実的なモデルを定式化し，最適探索努力配分を求める．

2　モデルの前提

モデルの前提は以下に列記するとおりである．

1. 探索空間は連続的 1 次元空間とし，その中に 1 つの静止目標物が存在する．以下，探索努力投入位置を x，目標位置を y で表す．
2. 目標存在分布 $p(y)$ は探索者に既知である．
3. 探索者が使用できる総探索努力量は Φ に制限されている．Φ は任意に分割可能で，探索空間の地点 x に投入される探索努力密度を $\varphi(x)$ と書く．
4. 地点 x に投入された探索努力 $\varphi(x)$ は地点 y において $\varphi(x)\,g_r(|x-y|)$ の有効性を持つと仮定する．ここに g_r は探索努力の有効性の距離による逓減率を表す関数 (以下，周辺効果関数という) であり $(0 \le g_r(|x-y|) \le 1)$，尺度係数を γ とする．
$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} g_r(|x-y|)\,dy.$$
5. 最適性の評価尺度は，目標探知確率 $P(\varphi)$ とする．

3　定式化

モデルの前提 4 により努力配分 $\{\varphi(x)\}$ によって，地点 y の目標物が発見される条件付目標探知確率 $P(\varphi|y)$ は次式で表される．

$$P(\varphi|y)=1-\exp\Big(-\alpha(y)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)g_r(|x-y|)\,dx\Big).$$

従って，目標探知確率 $P(\varphi)$ は次式で表される．

$$P(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}p(y)P(\varphi|y)\,dy$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}p(y)\{1-\exp\big(-\alpha(y)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)g_r(|x-y|)dx\big)\}\,dy.$$

ゆえに問題は次式で定式化される．

$(\mathbf{P_1})$ $Maximize$: $P(\varphi)$,

$$subject\ to:\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx=\Phi,\ \varphi(x)\ge 0.$$

$P(\varphi)$ を最大にする Φ の配分 $\varphi=\{\varphi(x), x\in R\}$ を最適努力配分 φ^* と書く．

4　最適努力配分 φ^*

$(\mathbf{P_1})$ において，

$$\psi(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)g_r(|x-y|)\,dx \qquad (1)$$

と置けば，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)g_r(|x-y|)\,dxdy=\gamma\Phi.$$

$(\mathbf{P_1})$ の制御関数 $\{\varphi\}$ を $\{\psi\}$ で置き換えれば，次の最大化問題となる．

$(\mathbf{P_2})$

$$Maximize:P(\psi)=\int_{-\infty}^{\infty}p(y)\{1-\exp(-\alpha(y)\psi(y))\}dy,$$

$$subject\ to:\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)\,dy=\gamma\Phi,\ \psi(y)\ge 0.$$

$(\mathbf{P_2})$ は従来の Koopman 問題であるので，最適解 ψ^* の必要十分条件は次式で与えられる．

$$\begin{cases}\psi^*(y)>0 \Longleftrightarrow \alpha(y)p(y)\exp\big(-\alpha\psi^*(y)\big)=\lambda,\\ \psi^*(y)=0 \Longleftrightarrow \alpha(y)p(y)\le\lambda \quad (\lambda\text{は正の定数}).\end{cases} \qquad (2)$$

式 (1),(2) より $\varphi^*(x)$ を求めることができる．

5　デイタム探索の最適探索

ここではデイタム探索の状況を考え，目標分布 $p(y)$ はデイタム点を中心とする分散 σ_0^2 の正規分布 $N(0,\sigma_0^2)$ とする．$g_r(|x-y|)$ は次の 2 つの場合を考える．

1. 定距離周辺効果関数　a は正の定数
$$g_r(|x-y|)=\begin{cases}1, & |x-y|\le a,\\ 0, & |x-y|>a.\end{cases}$$
2. 指数型周辺効果関数　β は正の定数
$$g_r(|x-y|)=\exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{2\beta^2}\Big).$$

5.1　定距離周辺効果関数の場合

最適解 ψ^* の必要十分条件 (2) から式 (1) は次式となる．

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{y-a}^{y+a}\varphi(x)\,dx &= \dfrac{1}{2\alpha\sigma_0^2}(r_0^2-y^2),\ |y|\le r_0,\\ \displaystyle\int_{y-a}^{y+a}\varphi(x)\,dx &= 0\,,|y|>r_0,\big(r_0=(3a\alpha\sigma_0^2\Phi)^{\frac{1}{3}}\big).\end{cases} \qquad (3)$$

式 (3) から $\varphi(x)$ を求めると次式となる.

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4a\alpha\sigma_0^2}\Big(r_0^2+\dfrac{a^2}{3}-x^2\Big), & |x|\le r_0-a,\\ 0, & |x|>r_0-a.\end{cases}$$

上式の $\varphi(x)$ は総量制約の条件を満足しないので, これを満足するように r_0 を補正し, 近似解 $\varphi(x)$ とする.

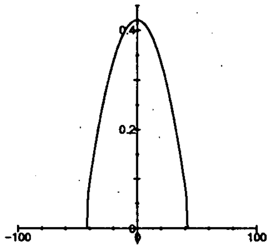
$$\Phi=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx=2\int_0^{r_1-a}\varphi(x)\,dx$$
$$\Longleftrightarrow f(r_1)\equiv r_1^3-a^2r_1-3a\alpha\sigma_0^2\Phi=0.$$

上記の 3 次方程式は, 唯一の正根を持つので, この根 r_1 を用いて準最適努力配分 $\varphi^*(x)$ を次式とする.

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4a\alpha\sigma_0^2}\Big(r_1^2+\dfrac{a^2}{3}-x^2\Big), & |x|\le r_1-a,\\ 0, & |x|>r_1-a.\end{cases}\qquad(4)$$

図 1 は g_r の尺度係数 $\gamma=2a=6$ の場合について式 (4) の $\varphi^*(x)$ を図示したものである.

$\varphi^*(x)$ $(r_0=44.81,\ r_1=44.88)$



〈パラメータ〉
$a=3.0$
$\alpha=1.0$
$\sigma_0=20$
$\Phi=25$

図 1: $\varphi^*(x)$ の例

5.2 指数型周辺効果関数の場合

最適解 ψ^* の必要十分条件 (2) から式 (1) は次式となる.

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{2\beta^2}\Big)\,dx=\frac{1}{2\alpha\sigma_0^2}(r_0^2-y^2),\\ \qquad |y|\le r_0,\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{2\beta^2}\Big)\,dx=0,\ |y|>r_0.\end{cases}\qquad(5)$$

$$r_0=(1.5\sqrt{2\pi}\alpha\beta\sigma_0^2\Phi)^{\frac{1}{3}}.$$

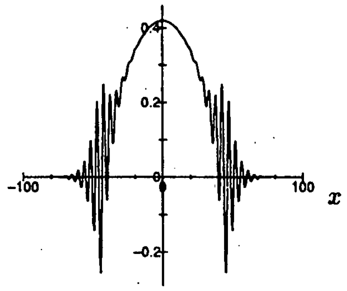
式 (5) を満足する非負関数 $\varphi(x)$ は存在しないことが証明される. 従って, 式 (5) を $\varphi(x)<0$ を許す暫定解の連立方程式に帰着して数値解を求める.

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{2cM}\varphi(x_i)\exp\Big(-\frac{(x_i-y_j)^2}{2\beta^2}\Big)h=\frac{1}{2\alpha\sigma_0^2}(r_0^2-y_j^2),\\ \qquad |y_j|\le r_0,\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{2cM}\varphi(x_i)\exp\Big(-\frac{(x_i-y_j)^2}{2\beta^2}\Big)h=0,\ |y_j|>r_0.\end{cases}\qquad(6)$$

ここで, $x_i=-3\sigma_0+ih$, $y_j=-3\sigma_0+jh$, $(0\le i,j\le 2cM)$, $h=\dfrac{r_0}{M}$, $c=\lfloor\dfrac{3\sigma_0}{r_0}\rfloor+1$, i,j は正の整数, M は r_0 の分割数とする.

g_r の尺度係数及びその他のパラメータを図 1 のケースと同じ値にとって, 式 (6) を解くと, 図 2 のような $x=\pm r_0$ 付近で振動する暫定解 $\varphi(x_i)$ を得る.

$\varphi(x)$ $(r_0=44.81,\ c=2,\ M=20)$



〈パラメータ〉
$\gamma=6\,(=\sqrt{2\pi}\beta)$
$\beta=2.393$
$\alpha=1.0$
$\sigma_0=20$
$\Phi=25$

図 2: 暫定解 $\varphi(x_i)$ の例

実行可能な準最適解を得るために, 総量制約を満足する非負の $\tilde{\varphi}(x_i)$ と暫定解 $\varphi(x_i)$ の差の 2 乗の総和を最小にする近似解 $\tilde{\varphi}(x_i)$ を考える.

$$Minimize:\sum_{i=0}^{2cM}\Big(\tilde{\varphi}(x_i)-\varphi(x_i)\Big)^2,$$
$$subject\ to:\sum_{i=0}^{2cM}\tilde{\varphi}(x_i)\,h=\Phi,\ \tilde{\varphi}(x_i)\ge 0.$$

上式から求められた近似解 $\tilde{\varphi}(x_i)$ を準最適努力配分 $\varphi^*(x)$ とする. 結果については発表の際に示す.

6 まとめと今後の課題

探索努力の局所有効性を緩和したモデルを定式化し, 精度のよい準最適解を得た. また本研究のモデルにおいて, $g_r(|x-y|)=\delta$ と置けば, Koopman モデルと一致することが容易に示される.

逆 n 乗発見法則等のセンサーの探知モデルの距離対探知率曲線と整合した g_r について $\varphi^*(x)$ を求めることが今後の課題である.

参考文献

[1] B.O.Koopman: The Theory of Search III. *Journal of the Operations Research Society of America,* **5** (1957) 613-626.

[2] L.D.Stone: *Theory of Optimal Search 2nd Edition.* (Military Applications Section Operations Research Society of America, 1989).

[3] W.R.Stromquist and L.D.Stone: Constrained Optimization of Functionals with Search Theory Applications. *Mathmatics of Operations Research,* **6** (1981) 518-529.