

目標物の処理時間を考慮した探索労力配分問題

01007584 大阪工業大学 一森 哲男 ICHIMORI Tetsuo

1 はじめに

探索労力の配分問題は資源配分問題の応用として大変興味深い。さて、これまでの探索問題では目標物を発見することが極めて重要視されてきた。実際、海や山での遭難者の発見では、発見さえすれば、後のことはあまり重要ではない。しかしながら、地雷の発見や不審者の発見などは、発見後の処理も重大になってくる。このような問題では、探索者が目標物を処理するので、手持ちの探索労力をすべて目標物の発見に費やすのではなく、発見後の目標物の処理にも労力を費やさなければならない。もちろん、路面の損傷の発見とその修理のように、探索者と処理者とが別々の時もある。

探索労力と発見率の関係は指数関数を仮定する。これは目標物がランダムに動く場合やランダムに探索することを意味する。一つの目標物の処理時間は一定とする。

2 定式化

上で述べた問題を定式化する。

$$(P) \quad \max \sum_{j=1}^n p_j (1 - e^{-a_j x_j})$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n x_j + c \left\{ \sum_{j=1}^n p_j (1 - e^{-a_j x_j}) \right\} \leq Q$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 0, \dots, n)$$

ここで定数 $p_j > 0$, $a_j > 0$ ($j = 0, \dots, n$) は、それぞれ、探索対象領域 j での潜在的目標物の総数と発見し易さを表す。また、すべての目標物の処理時間 c は同じとし、手持ち資源の総量は $0 < Q < \infty$ とする。

問題 (P) は非凸集合上の凹関数の最大化問題である。明らかに、資源は使えば使うほど発見できる目標物の数は増加するので目的関数の最大値を与える解では、問題 (P) の制約不等式は等号の関係となっている。つまり、問題 (P) の制約不等式は等式に直しても最適解は変わらない。問題 (P) の目的関数は制約関数の一部分ということに注意すれば、この問題の目的は配分される資源の総量の最小化に置き換

えることができる。さらに、この制約関数は単調増加関数なので、この等式は逆向きの不等式で置き換えても構わない。よって、問題 (P) は次のように、書き直せる。

$$(P') \quad \min \sum_{j=1}^n x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n x_j + c \left\{ \sum_{j=1}^n p_j (1 - e^{-a_j x_j}) \right\} \geq Q$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 0, \dots, n)$$

問題 (P') は凸領域上の線形関数の最小化問題となっている。

3 解法

問題 (P') の制約関数の各成分は狭義の増加凹関数であるので、問題 (P') の最適解は制約関数の各成分の微分係数が等しいときに得られる。

新しい変数 $\lambda > 0$ を導入して

$$\{x_j + cp_j(1 - e^{-a_j x_j})\}' = \lambda$$

と置く。つまり、

$$x_j = \frac{1}{a_j} \log \frac{cp_j a_j}{\lambda - 1}$$

が問題 (P') の最適解である。ただし、これが実現できないとき、つまり、原点での傾きが与えられた値より大きければ、その配分資源はゼロである。

4 例題

$n = 3, c = 0.1, Q = 100, p_1 = 2000, a_1 = 0.005, p_2 = 1500, a_2 = 0.006, p_3 = 1000, a_3 = 0.008$ とする。微分係数 $\{x_j + cp_j(1 - e^{-a_j x_j})\}'$ の原点での値は $j = 3$ で 1.8, $j = 2$ で 1.9, $j = 1$ で 2 なので、それぞれの値に対して次式を計算してみる。

$$x_j = \max \left\{ 0, \frac{1}{a_j} \log \frac{cp_j a_j}{\lambda - 1} \right\}.$$

すると $j = 3$ のとき $x_1 + x_2 + x_3 = 120.9$, $j = 2$ のとき $x_1 + x_2 + x_3 = 41.1$, $j = 1$ のとき $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ となる。 $Q = 100$ なので $1.8 < \lambda < 1.9$ となる。実際、 $\lambda^* = 1.8255$ が得られ、最適解は $x_1^* = 38.35$, $x_2^* = 14.40$, $x_3^* = 0$ となる。