1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

ネットワークフローと積形式解

01602570 東京理科大学 宮沢政清 MIYAZAWA Masakiyo
東京理科大学 高田寛之 TAKADA Hiyoyuki

1. はじめに

有限個のノードからなる待ち行列ネットワークの定常分布 π が各ノードの周辺分布 π_j の積であるとき，すなわち，ある定数 $c>0$ があって，

$$\pi(\boldsymbol{x}) = c\prod_{j=0}^{N} \pi_j(x_j), \qquad \boldsymbol{x}=(x_0,\ldots,x_N)\in\mathcal{X},$$

であるとき，このネットワークは積形式解を持つ，または，積形式ネットワークであるという．ここに，$\mathcal{X}$ はネットワーク状態の集合であり，各ノードの状態の集合 $\mathcal{X}_j$ の積集合 $\prod_{j=0}^{N}\mathcal{X}_j$ の部分集合であるとする．また，$\mathcal{X}_j$ などの集合はすべて可算とする．なお，ノード 0 は開放型ネットワークの場合には外部を表す．$\mathcal{X}=\prod_{j=0}^{N}\mathcal{X}_j$ のときは，$c=1$ である．これ以外の時は，c は正規化常数として求められる．例えば，閉鎖型ネットワークなどがその例である．

本論文では，$c\neq 1$ の場合を制約型のネットワーク，$c=1$ の場合を非制約型のネットワークと呼ぶ．なお，制約型のネットワークでは，積形式解を持っても，ノードの状態は独立とならない．

1970年代から Jackson, BCMP, Kelly などの積形式ネットワークが応用上重要なモデルとして広く使われてきた．最近１０年ほどの間に，負の客や負の信号などの到着により客を減らす仮想的な客を加えても積形式解が得られることがわかり，新たな展開を見せている（[1] など参照）．

本論文の目的は，このような積形式を得るための必要十分条件を求めることである．これまで，次の条件の下で研究が行われてきた．

- 非制約型ネットワークである．
- 経路選択はネットワークの状態によらず，現在のノードと退去のクラスのみに依存する．
- 瞬間的に複数のノードを通過して，次々に状態変化を起こすことを許さない．

文献 [2, 4] では，この種のネットワークで，各ノードの変化が一般的である場合に，積形式解を持つための必要十分条件を求めている．また，[3] では，更に，ポアソン到着と各ノードで通常の客のサービスを想定したときに，退去が外部にのみ行くノードを除いて，準可逆性が必要十分条件となることを導いている．

本論文では，これらの条件をゆるめて，積形式を得るための必要十分条件を導く．これまで，[2, 4] 等では，条件付き退去率に注目して条件を導いていたが，この方法では，モデルの条件をゆるめると同様な必要十分条件を得ることは困難である．本論文では，条件付き到着率に注目して必要十分条件を導く．

2. モデルの仮定と条件付き流れの率

ネットワークは，番号 $0,1,\ldots,N$ がついた $N+1$ 個のノードから構成される．ノード j は，以下の条件付き確率と推移率とで記述される．

$p^{\mathrm{A}}_{ju}(x_j,y_j)$ ：クラス u の到着があったとき，ノード j の状態が x_j から y_j へ変わる確率.

$q^{\mathrm{D}}_{ju}(x_j,y_j)$ ：クラス u の退去があったとき，ノード j の状態が x_j から y_j へ変わる率.

$q^{\mathrm{I}}_{ju}(x_j,y_j)$ ：ノード j の状態が内部推移により，x_j から y_j へ変わる率.

特に，$\mathcal{X}_0=\{0\}$ ならば，外部（ノード 0）から率 $q^{\mathrm{D}}_{0u}(0,0)$ のポアッソン過程に従ってクラス u の客が到着する開放型ネットワークとなる．瞬間移動があるモデルでは，クラス u の到着で，ノード j の状態が x_j から y_j へ変わったとき，確率 $f_{ju,v}(x_j,y_j)$ でクラス v の退去となる．ノード j からのクラス u の退去は，退去後のネットワーク状態 $\boldsymbol{y}$ に依存した経路選択確率

$$r_{ju,kv}(\boldsymbol{y})$$

で，ノード k へのクラス v の到着となる．

このモデルは，退去 ⇒ 到着（瞬間移動がある時はこれを繰り返す），または，内部推移により，状態が推移する連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t)\}$ として記述することができる．このマルコフ連鎖の定常分布 π が存在したとする．この分布のノード j についての周辺分布を π_j とする．ノード j か

らのクラス u の条件付き退去率 $\beta_{ju}(\boldsymbol{y})$ と到着率 $\alpha_{ju}(\boldsymbol{y})$ を

$$\beta_{ju}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{\pi_j(y_j)} \sum_{x_j} \pi_j(\boldsymbol{y}_j(x_j))\Big(q_{ju}^{\text{D}}(x_j, y_j) + \sum_v \alpha_{jv}(\boldsymbol{y}_j(x_j)) p_{jv}^{\text{A}}(x_j, y_j) f_{jv,u}(x_j, y_j)\Big), \quad (1)$$

$$\alpha_{ju}(\boldsymbol{y}) = \sum_k \sum_v \beta_{kv}(\boldsymbol{y}) r_{kv,ju}(\boldsymbol{y}), \quad (2)$$

により定義すると，次の補題が成り立つ．ここに，$\boldsymbol{y}_j(x_j)$ は $\boldsymbol{y}$ の j 番目の要素を x_j で置き換えた $\mathcal{X}$ のベクトルとする．

補題 2.1 マルコフ連鎖 $\{X(t)\}$ が正則かつ規約ならば，定常分布 π は次の式により唯一つ定まる．

$$\begin{aligned}
&\pi(\boldsymbol{x}) \sum_j \sum_{y_j} \Big(\sum_u q_{ju}^{\text{D}}(x_j, y_j) + q_j^{\text{I}}(x_j, y_j) \Big) \\
&\quad + \pi(\boldsymbol{x}) \sum_j \sum_u \alpha_{ju}(\boldsymbol{x}) \\
&= \sum_j \sum_{y_j} \sum_u \pi(\boldsymbol{x}_j(y_j)) \alpha_{ju}(\boldsymbol{x}_j(y_j)) p_{ju}^{\text{A}}(y_j, x_j)) \\
&\quad + \sum_j \sum_{y_j} \sum_u \pi(\boldsymbol{x}_j(y_j)) q_{ju}^{\text{D}}(y_j, x_j) \\
&\quad + \sum_j \sum_{y_j} \pi((\boldsymbol{x}_j(y_j)) q_{ju}^{\text{I}}(y_j, x_j), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \quad (3)
\end{aligned}$$

3. 必要十分条件

周辺分布 π_j を定めるために，x_j を与えた下で式 (3) を他の変数について加える．このとき，$\mathcal{X}(j, x_j) = \{\boldsymbol{y} \in \mathcal{X}; y_j = x_j\}$ とし，

$$\hat{\alpha}_{ju}(x_j) = \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{X}(j, x_j)} \Big(\prod_{\ell \neq j} \pi_\ell(y_\ell) \Big) \alpha_{ju}(\boldsymbol{y}) \quad (4)$$

とおくと，非制約型ネットワークの場合には，

$$\begin{aligned}
&\pi_j(x_j) \sum_{y_j} \left(\sum_u q_{ju}^{\text{D}}(x_j y_j) + q_j^{\text{I}}(x_j, y_j) \right) \\
&\quad + \pi_j(x_j) \sum_u \hat{\alpha}_{ju}(x_j) \\
&= \sum_{y_j} \sum_u \pi_j(y_j) \hat{\alpha}_{ju}(y_j) p_{ju}^{\text{A}}(y_j, x_j) \\
&\quad + \sum_{y_j} \sum_u \pi_j(y_j) q_{ju}^{\text{D}}(y_j, x_j) \\
&\quad + \sum_{y_j} \pi_j(y_j) q_j^{\text{I}}(y_j, x_j), \qquad x_j \in \mathcal{X}_j. \quad (5)
\end{aligned}$$

により，π_j を求めることができる．

式 (5) と (3) から，内部推移の項を消去して式を整理すると次式が導かれる．

$$\sum_{j=0}^N \sum_u \sum_{y_j \in \mathcal{X}_j} \Big(\alpha_{ju}(\boldsymbol{x}_j[y_j]) - \hat{\alpha}_{ju}(y_j) \Big) \times \left(\frac{\pi_j(y_j)}{\pi_j(x_j)} p_{ju}^{\text{A}}(y_j, x_j) - 1[y_j = x_j] \right) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \quad (6)$$

これより，次の定理が得られる．

定理 3.1 非制約型のネットワークが積形式の定常分布を持つための必要かつ十分条件は，(5) と (1) 及び (2) を満たす π_j, $j = 0, 1, \ldots, N$, が存在して，(6) が成り立つことである．

• この結果は制約型のネットワークに拡張することができる．ただし，(5) と (2) は，制約条件のために

$$c_j(x_j) = \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{X}(j, x_j)} \prod_{\ell \neq j} \pi_\ell(y_\ell).$$

を使って変更する必要がある．

• (6) の簡単な十分条件は，すべての j について，

$$\alpha_{ju}(\boldsymbol{x}) = \hat{\alpha}_{ju}(x_j), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$$

が成り立つことである．これは，条件付き到着率が到着ノードの状態のみを参照することを表している．

• 瞬間移動がない場合には，条件 (6) の条件付き到着率を条件付き退去率を使って置き換えることができる．特に，経路選択確率がネットワーク状態に依存しない場合には，[2, 4] の結果が得られる．

参考文献

[1] X. Chao, M. Miyazawa and M. Pinedo (1999), *Queueing Networks, Customers, Signals and Product Form*, Wiley.

[2] X. Chao, M. Miyazawa, R. Serfozo and H. Takada (1998), Queueing Systems 28, 377-403.

[3] Y.V. Malinkovsky (1990), Theory of Prob. and Appl. 35(4), 797-802.

[4] H. Takada and M. Miyazawa (1997), Necessary and sufficient conditions for product-form queueing networks, preprint.