1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

パッファの空き数によって加工時間を変化させる 3-Stage 生産ラインのモデル分析

＊千葉工業大学　仇　莉　QIU　Li
01201380　千葉工業大学　鈴木　誠道 SUZUKI　Shigemichi

1．はじめに

本稿では，故障を伴う3台のマシンと2個の中間バッファを有する生産システムを取り上げ，バッファの空き数によって生産を調整する生産システムを提案し，対象システムをモデル化している。まず，平衡状態方程式を求め，その遷移確率行列のブロック三角構造とそのブロック内の部分行列の特種構造を明らかにする。これらの特種構造に基づいてシステムの性能を効率的に計算するための基礎を提供する。

2．モデル

（1）バッファ1，2の容量をそれぞれM, N<∞ とする。

（2）バッファ1の空き数（M_2 中の容量1を含む）が m であり，かつバッファ2の空き数（M_2 中の容量1を含まないで，M_3 中の容量1を含む）が n であるとき，マシン M_1，M_2，M_3 の加工時間 $X_1(m)$，$X_2(m,n)$，$X_3(n)$ の分布をそれぞれ以下の式とする。

$S_m^{(1)}(t)=1-e^{-f_{(m)}\mu_1 t}$　（$1\leqq m\leqq M+1$）

$S_{mn}^{(2)}(t)=1-e^{-g_{(m,n)}\mu_2 t}$　（$0\leqq m\leqq M,\ 1\leqq n\leqq N+1$）

$S_n^{(3)}(t)=1-e^{-h_{(n)}\mu_3 t}$　（$0\leqq n\leqq N$）

ただし，$f_{(m)}$ を単調増加関数かつ $f_{(0)}=1$，$g_{(m,n)}$ をそれぞれmについて単調減小関数nについて単調増加関数かつ $g_{(0,n)}=g_{(n)}$，$g_{(m,0)}=g_{(m)}$，$h_{(n)}$ を単調減小関数かつ $h_{(0)}=1$ とする。m, nの数によって，マシン M_1，M_2，M_3 の生産能力を調整する。

(3) マシン M_1，M_2，M_3 の故障までの時間 Y_1，Y_2，Y_3 の分布をそれぞれパラメーター α_1，α_2，α_3 の指数分布とする。マシン M_1，M_2，M_3 の修理時間 Z_1，Z_2，Z_3 の分布をそれぞれパラメーター β_1，β_2，β_3 の指数分布とする。各機械は加工していない時は，故障しないものとする。

(4) 以上の加工時間，修理時間，故障までの時間は互いに独立とする。

(5) 下流バッファに空きがないときはマシン M_i は加工を開始しない。このとき，マシン M_i は（生産）ブロッキング状態にあるという。

(6) マシン M_1 へは倉庫入力，マシン M_3 からは製品庫出力を仮定する。

3．モデル分析

各機械の加工中と修理中の間の状態遷移行列はつぎのようになる。

$$R_m=\begin{bmatrix}-(\alpha_1+f_{(m)}\mu_1) & \alpha_1\\ \beta_1 & -\beta_1\end{bmatrix}\qquad\text{(R)}$$

$$T_{mn}=\begin{bmatrix}-(\alpha_2+g_{(m,n)}\mu_2) & \alpha_2\\ \beta_2 & -\beta_2\end{bmatrix}\qquad\text{(T)}$$

$$H_n=\begin{bmatrix}-(\alpha_3+h_{(n)}\mu_3) & \alpha_3\\ \beta_3 & -\beta_3\end{bmatrix}\qquad\text{(H)}$$

モデルの仮定より，マシン M_i がブロッキング状態またはスタービング状態にあるときは，マシン M_i は加工可能状態にあることがいえる。

任意の時刻 t でのバッファ1，2の空き数と3つのマシンの状態についての全システムの状態は（m, n，j）で表される。全システムの状態数が 8(M+1)(N+1)+2 となることを仮定より示すことができる。

これらの状態相互間の遷移確率行列Qは状態（m, n，j）に関して辞書式に並べて行列表現すると以下のようになる。

$$Q=\begin{bmatrix}A_{00} & A_{01} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & A_{M-1M-1} & A_{M-1M} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & A_{MM-1} & A_{MM} & A_{MM+1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & A_{M+1M} & A_{M+1M+1}\end{bmatrix}$$

Qの成分を表現するために，つぎの Kronecker 積と和を用いている，また R_m，T_{mn}，H_n などは（R），（T），（H）に定義されている。

Kronecker 積：$A\otimes B=(a_{ij}B)$，$A=(a_{ij})$；

Kronecker 和：$A\oplus B=I_A\otimes B+A\otimes I_B$，$I_A$，$I_B$ はそれぞれ行列A，Bと同次の単位行列である。

$R_m^0=-R_m e, T_{mn}^0=-T_{mn}e, H_n^0=-H_n e,\quad e=(1,1)^T$ とする。Ｉは2次単位行列である。また $\gamma=(1,0)$ とする，これは機械の初期状態確率である。

Qの要素行列 A_{ij} はつぎのようになる。

$$A_{00}=\begin{bmatrix}B_{00}^{(00)} & B_{01}^{(00)} & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0\\ 0 & B_{11}^{(00)} & B_{12}^{(00)} & \cdots\cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & B_{22}^{(00)} & \cdots\cdots & 0 & 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & B_{NN}^{(00)} & B_{NN+1}^{(00)}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & B_{N+1N+1}^{(00)}\end{bmatrix}$$

ここで，$B_{00}^{(00)}=H_0$，$B_{jj}^{(00)}=T_{0j}\oplus H_j$，
j=1,2,……,N，$B_{N+1N+1}^{(00)}=T_{0N+1}$，
$B_{01}^{(00)}=\gamma\otimes H_0^0\gamma, B_{jj+1}^{(00)}=I\otimes H_j^0\gamma$，
$j=1,2,\ldots\ldots,N-1, B_{NN+1}^{(00)}=I\otimes H_N^0$

同様に

$$
A_{ii} = \begin{bmatrix} B_{00}^{(ii)} & B_{01}^{(ii)} & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_{11}^{(ii)} & B_{12}^{(ii)} & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{22}^{(ii)} & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & B_{NN}^{(ii)} & B_{NN+1}^{(ii)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & B_{N+1N+1}^{(ii)} \end{bmatrix}
$$

$B_{00}^{(ii)} = R_i \oplus H_0$， $B_{jj}^{(ii)} = R_i \oplus T_{ij} \oplus H_j$ ，

j=1,2,……,N， $B_{N+1N+1}^{(ii)} = R_i \oplus T_{iN+1}$，

$B_{01}^{(ii)} = I \otimes \gamma \otimes H_0^{\,0}\gamma, B_{jj+1}^{(ii)} = I \otimes I \otimes H_j^{\,0}\gamma,$

$j = 1,2,\ldots\ldots,N-1, B_{NN+1}^{(ii)} = I \otimes I \otimes H_N^{\,0}$

i＝1， 2， ……， M。

$$
A_{M+1M+1} = \begin{bmatrix} B_{00}^{(M+1M+1)} & B_{01}^{(M+1M+1)} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & B_{11}^{(M+1M+1)} & B_{12}^{(M+1M+1)} & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_{22}^{(M+1M+1)} & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & B_{N+1N+1}^{(M+1M+1)} \end{bmatrix}
$$

$B_{jj}^{(M+1M+1)} = R_{M+1} \oplus H_j, j = 0,1,\ldots\ldots,N,$

$B_{N+1N+1}^{(M+1M+1)} = R_{M+1}$， $B_{NN+1}^{(M+1M+1)} = I \otimes H_N^{\,0}$

$B_{jj+1}^{(M+1M+1)} = I \otimes H_j^{\,0}\gamma, j = 0,1,2,\ldots\ldots,N-1$。

$$
A_{ii+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ B_{10}^{(ii+1)} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_{21}^{(ii+1)} & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & B_{N+1N}^{(ii+1)} & 0 \end{bmatrix}
$$

$B_{10}^{(01)} = \gamma \otimes T_{01}^{\,0} \otimes I, B_{jj-1}^{(01)} = \gamma \otimes T_{0j}^{\,0}\gamma \otimes I,$

$j = 2,\ldots\ldots,N, B_{N+1N}^{(01)} = \gamma \otimes T_{0N+1}^{\,0}\gamma \otimes \gamma$

$B_{10}^{(ii+1)} = I \otimes T_{i1}^{\,0} \otimes I, B_{jj-1}^{(ii+1)} = I \otimes T_{ij}^{\,0}\gamma \otimes I,$

$j = 2,\ldots\ldots,N, B_{N+1N}^{(ii+1)} = I \otimes T_{iN+1}^{\,0}\gamma \otimes \gamma$

$i = 1,2,\ldots\ldots,M-1, B_{jj-1}^{(MM+1)} = I \otimes T_{Mj}^{\,0} \otimes I,$

$j = 1,2,\ldots\ldots,N, B_{N+1N}^{(MM+1)} = I \otimes T_{MN+1}^{\,0} \otimes \gamma$

$$
A_{ii-1} = \begin{bmatrix} B_{00}^{(ii-1)} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_{11}^{(ii-1)} & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{22}^{(ii-1)} & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & B_{N+1N+1}^{(ii-1)} \end{bmatrix}
$$

$B_{jj}^{(10)} = R_1^{\,0} \otimes I, j = 0,N+1, B_{jj}^{(10)} = R_1^{\,0} \otimes I \otimes I,$

$j = 1,\ldots\ldots,N, B_{jj}^{(ii-1)} = R_i^{\,0}\gamma \otimes I,$

$j = 0,N+1, B_{jj}^{(ii-1)} = R_i^{\,0}\gamma \otimes I \otimes I,$

$j = 1,\ldots\ldots,N, i = 2,\ldots\ldots,M, B_{00}^{(M+1M)} = R_{M+1}^{\,0}\gamma \otimes I$

$B_{jj}^{(M+1M)} = R_{M+1}^{\,0}\gamma \otimes \gamma \otimes I,$

$j = 1,2,\ldots\ldots,N, B_{N+1N+1}^{(M+1M)} = R_{M+1}^{\,0}\gamma \otimes \gamma$

4．生産ラインの性能

システムの平衡状態確率を $\pi = \left\{\pi_{mn}^{(j)}\right\}$ とする。平衡状態方程式 $\begin{cases} \pi Q = 0 \\ \pi\tilde{e} = 1 \end{cases}$ を解くことにより，πを求めることができる。$\tilde{e}$ はQと同次のすべての成分が1である列ベクトルである。

マシン M_3 は稼動中の時，この生産ラインは稼動中とみなせる。

（1）生産ラインに対する利用率

マシン M_1， M_2， M_3 の利用率はπを用いて表わすことができる。例えば，マシン M_3 の利用率 A_3 は

$$
A_3 = \pi_{00}^{(1)} + \sum_{n=1}^{N+1}(\pi_{0n}^{(1)} + \pi_{0n}^{(3)}) + \sum_{m=1}^{M}(\pi_{m0}^{(1)} + \pi_{m0}^{(5)}) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N+1}(\pi_{mn}^{(1)} + \pi_{mn}^{(3)} + \pi_{mn}^{(5)} + \pi_{mn}^{(7)}) + \sum_{n=0}^{N+1}(\pi_{M+1n}^{(1)} + \pi_{M+1n}^{(5)})
$$

A_3 はシステムの利用率 A_S と見なせる。

（2）生産ラインに対する故障発生率

単位時間内に故障が発生する回数を故障発生率と呼ぶ。

マシン M_1， M_2， M_3 の故障発生率はそれぞれ以下の式で表わされる。

$W_{f_1} = \alpha_1 A_1$， $W_{f_2} = \alpha_2 A_2$， $W_{f_3} = \alpha_3 A_3$。

（3）生産ラインに対する生産率

マシン M_i (i=1,2,3) の生産率はこのマシンの作業可能になる確率と部品の加工率の積である。

（a）マシン M_1 の生産率は

$$
W_A = \mu_1\Big(\sum_{j=1}^{2}\pi_{00}^{(j)} + \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{4}\pi_{0n}^{(j)} + \pi_{0N+1}^{(1)} + \pi_{0N+1}^{(3)} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{2} f_{(m)}\pi_{m0}^{(j)} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{4} f_{(m)}\pi_{mn}^{(j)} + \sum_{m=1}^{M} f_{(m)}(\pi_{mN+1}^{(1)} + \pi_{mN+1}^{(3)}) + \sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1}^{2} f_{(M+1)}\pi_{M+1n}^{(j)} + f_{(M+1)}\pi_{M+1N+1}^{(1)}\Big)
$$

で表される。

（b）マシン M_2， M_3 の生産率 W_B, W_C は上式と同様に表わされる。定常状態において，マシン M_1， M_2， M_3 の生産率は等しく，それがシステムの生産率となるので，システムの生産率 W_S は $W_S = W_A$ となる。

5.まとめ

故障を想定した3機械の直列生産ラインについて，機械間のバッファの空き数によって，生産時間を変化させる生産調整方式をモデル化して，その構造の基本的な解析を行った。また利用率，生産率に関する表現を4節に与えた。その際 3 節に求めた大規模な遷移確率行列のコンパクトな表現が演算処理を行う際に有効となる。本稿の分析に沿った数値計算の展開については稿を改めて報告したい。

参考文献

[1] Neuts. M. F. "Matrix--Geometric Solutions in Stochastic Models--An Algorithmic Approach",The Johns Hopkins University Press 1981.

[2] Buzacott.J.A.and Shanthikumar.G.J. "Stochastic Models of Manufacturing Systems",PRENTICE HALL Englewood Cliffs,New Jersey.