1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

Minisum 型施設配置における需要密度と施設規模

01205430 筑波大学 鈴木 勉 *SUZUKI Tsutomu

1．はじめに

総移動距離を最小化する，いわゆる minisum 型施設配置問題は広範に適用されるが，大規模な問題の厳密解を求めることは一般に計算の手間が膨大になり実用的でない．実際上は地域毎に必要なおおよその施設数などがわかれば良いことも多く，厳密な解が求められなくとも，ある地点の周辺に必要な施設数を概略知るための何らかの簡便な手法が望まれる．

本稿では，需要や施設立地候補地点を連続的に扱う場合，滑らかな需要分布のもとでは，需要密度と施設の支配する領域内の総需要（施設規模）との間に一定の関係（規模密度法則と呼ぶ[4]）が成り立つことを示す．また，需要や施設立地候補地点を離散的に扱う p-median 問題の場合にもこの法則が成立しそうなことを示し，大規模な minisum 型施設配置問題の解の性質を探ることを目的とする．

2．連続需要・連続立地施設配置での規模密度法則

需要が連続で滑らかな分布であるとし，連続平面上に複数の施設を立地させる minisum 型配置問題を考える．但し，以下の仮定が成り立つものとしておく．

①全人口が施設を利用し，最近隣の施設を選択する．
②施設利用頻度は移動コストに依存せず一律である．
③移動コストは施設までの直線距離に比例する．
④施設コスト（建設・運用）は，利用者の多寡によって決まる施設規模に依存しない．つまり，総施設数が一定の場合，施設コストは定数として無視できる．
⑤施設数は十分に多く，施設密度は連続量として扱える．

需要密度が一様でない平面領域 D を考える．D 内の地点 x 近傍の微小領域（面積 dS）における需要密度（所与）及び施設密度ともにそれぞれ $p(x)$, $n(x)$と表せるとする．施設数が十分大きく，微小領域では施設密度を一様としてよいとすると，施設までの総距離は近似的に

$$d(x)=k\Big/\sqrt{n(x)} \tag{1}$$

となる（k：定数）．これを用いれば，施設までの総距離を最小化する minisum 型配置問題は，総人口 $P=\int_D p(x)dS$ を定数とすれば平均距離最小化と同義なので

$$\min_{n(x)} \quad \bar{d}=\frac{1}{P}\int_D d(x)p(x)dS=\frac{k}{P}\int_D \frac{p(x)}{\sqrt{n(x)}}dS \tag{2}$$

$$s.t. \quad \int_D n(x)dS=N$$

と表せる．但し，Nは総施設数（所与）である．Lagrange 未定乗数法を用いれば，Lagrangean を

$$L[n(x)]=\int_D\left\{\frac{kp(x)}{P\sqrt{n(x)}}+\lambda n(x)\right\}dS \tag{3}$$

とする（被積分関数は[2]で最小化された交通費と施設建設運営費の和と同型になる）と，停留条件は

$$-\frac{k}{2P}\frac{p(x)}{\{n(x)\}^{2/3}}+\lambda=0 \tag{4}$$

となるので，整理すると

$$n(x)=C_1\{p(x)\}^{2/3} \tag{5}$$

という関係が得られる（C_1：定数；以下同様）．すなわち，施設密度が需要密度の2/3乗に比例する状態が総距離の最小をもたらす．x に立地する一施設がサービスする面積 $a(x)$は，施設密度 $n(x)$の逆数に比例するので，

$$a(x)=C_2\{p(x)\}^{-2/3} \tag{6}$$

となり，これに需要密度を乗じた

$$s(x)=a(x)p(x)=C_3\{p(x)\}^{1/3} \tag{7}$$

は，施設に容量制約がないとして，施設が受け持つ需要，すなわち施設規模である．このように，施設規模が需要密度の 1/3 乗に比例するという規模密度法則が導かれる．

3．p-Median 問題での需要密度と施設規模

現実には，集計データを用いて，交通ネットワーク等の空間構造を反映させた大規模な p-median 問題を解きたいことも少なくない．このような場合にも規模密度法則が成り立てば，大凡の解の見当をつけることができる．ここでは東京大都市圏市区町村の役所役場位置・人口データを用いて，p-median 問題の厳密解を線形緩和法によって求め，施設規模と施設立地点近傍の需要密度の関係を分析する．

図１に対象とした２種のネットワーク（Delaunay 網・最小木）と需要分布（1990 年人口）を示す．それぞれのネットワーク上での p=28 のときの p-median 解（0-1 解が得られる）は図２のようになった．これらの解について，28 個の施設の施設規模 s_i と，その立地点の近傍の需要密度 p_i（$p_i=\sum_{j\in N_i}P_j\Big/\pi r^2$ で定義．但し $N_i=\{j\,|\,\|x_i-x_j\|<r\}$．ここでは r=15km とした）を計算した結果，図３に示すような関係が得られた．OLS による回帰分析の結果，

Delaunay 網： $s_i=346168p_i^{0.345}$ (R^2=0.761)

最小木： $s_i=342030p_i^{0.421}$ (R^2=0.646)

となり，２節の状況に近い Delaunay 網の場合はほぼ(7)式の関係が成り立つが，最小木の場合はややフィットが悪いことが明らかになった．

4．おわりに

大規模な p-median 問題に対しても，ほぼ規模密度法則が成立しそうなことが確認された．この性質を使えば，厳密解の求解が困難な大規模問題に対する良好な近似解やヒューリスティクスの初期解を得ることができるだろう．

本研究は平成 11 年度文部省科学研究費補助金（奨励研究(A)）（課題番号:10780273）による成果の一部である．

参考文献

[1] Gusein-Zade, S.M. (1993): Alternative Explanations of the Dependence of the Density of Centers on the Density of Population, *Journal of Regional Science*, **33**, 4, 547-558.
[2] 栗田治 (1996):「都市施設の数を決めるための数理モデル」，日本 OR 学会秋季研究発表会アブストラクト集，90-91.
[3] Palmer, D.S. (1973): The Placing of Service Points to Minimize Travel, *Operational Research Quarterly*, **24**, 121-123.
[4] Stephan, G.E. (1988): The Distribution of Service Establishments, *Journal of Regional Science*, **28**, 1, 29-40.
[5] 鈴木勉 (1999): 移動損失基準による地域施設密度と人口密度の理論的関係に関する研究，建築学会計画系論文集，521, 183-187.

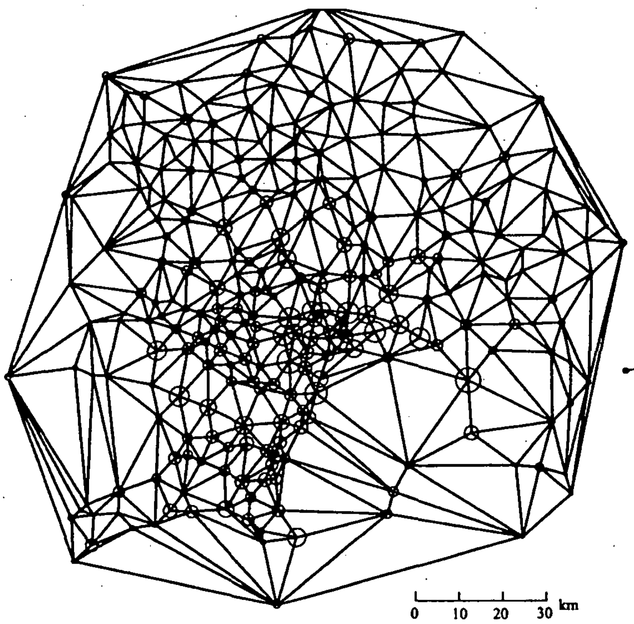

図１　東京大都市圏市区町村役所・役場位置データから生成したネットワーク
（左：Delaunay網，右：最小木；左図円の面積は需要（1990年国調人口）を表す）

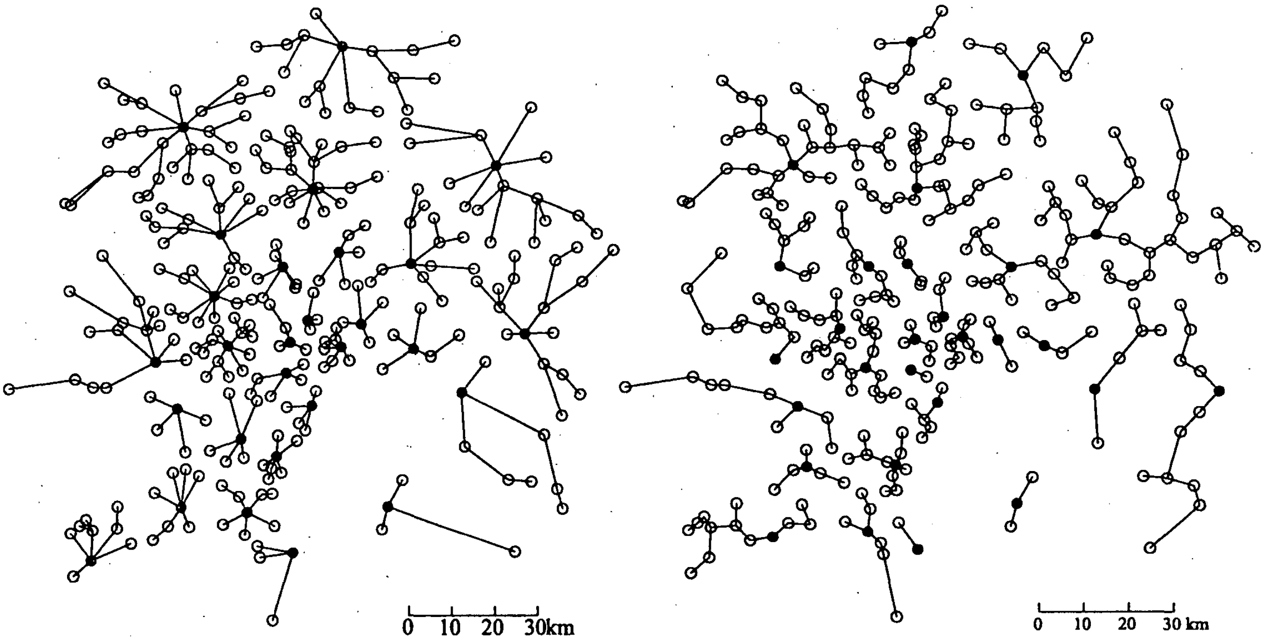

図２　p-Median問題の解（p=28）
（左：Delaunay網，右：最小木）

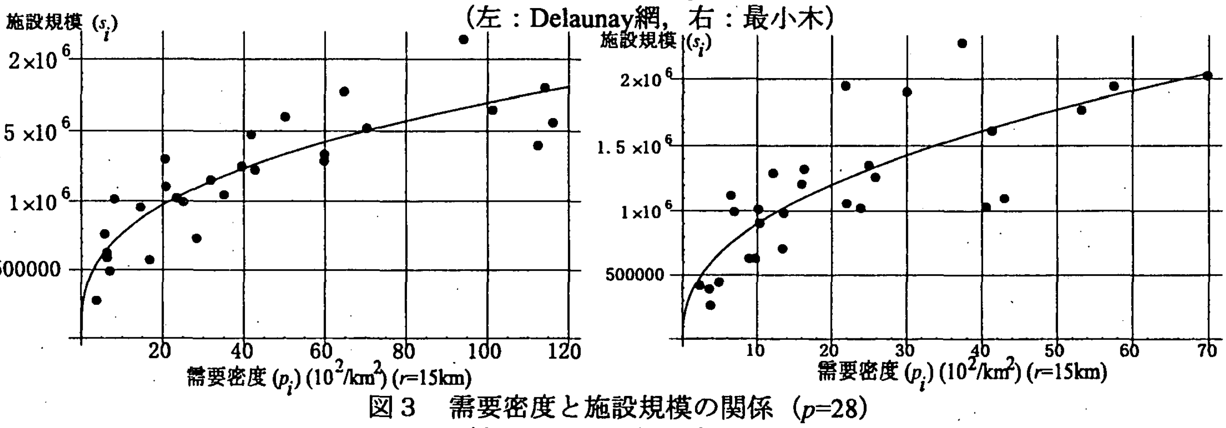

図３　需要密度と施設規模の関係（p=28）
（左：Delaunay網，右：最小木）