非凸領域の流動量分布と部分領域を通過する流動量

02004370　筑波大学　社会工学研究科　＊大津　晶　OHTSU Shou
01102840　筑波大学　社会工学系　腰塚武志　KOSHIZUKA Takeshi

1. はじめに

都市の基本的な活動である移動を単位として都市空間の性質を議論するときに，領域内のあらゆる2点間の距離の分布とならび重要であると考えられるのは，領域内の任意地点における移動の流動量分布である．

筆者はこれまで，円の領域について厳密な理論流動量分布を導出し，領域が凸のときには数値計算を用いて近似的な流動量分布を求めた (文献 [1]，[2])．後述するようにこれらの計算は領域をよぎる一様な直線を用いて行うため，非凸な図形に対して直接利用することはできない．しかし結果から述べると，この導出法は領域が凸でなかったり単連結でなかったりした場合でもある種の操作を加えるだけで有効であることが分かった．また後半では微小線分の流動量を用いた領域内部の部分領域を通過する量についても議論する．

2. 非凸領域の流動量分布

筆者らはこれまで凸領域内の流動量度量分布 (に限らず距離分布についても) の導出に際して，一様な直線が重要な役割を果たすことを訴えてきた．

紙面の都合上，本稿では一様な直線の定義や一様な直線で一様な点の関係を測る理論的な基礎を述べる余裕はないので，これらの詳細は文献 [3] を参照されたい．

いま凸領域 D 内のあらゆる2点で等しく移動が発生すると考える．

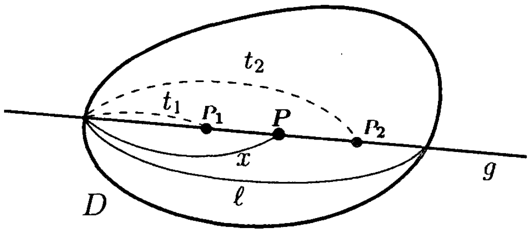

図1　凸領域をよぎる直線

図1のように一様な直線の集合 G から取りだした1本の直線 g で測ることができる地点 P を通過する流動量を $f^g(P)$ とすると，P における流動量 $f(P)$ は，P を通過するすべての直線について調べて，

$$\begin{aligned} f(P) &= \int_{P\cap g\neq\phi} f^g(P)\ \mathrm{d}G \\ &= \int_{P\cap g\neq\phi} 2\,\ell\cdot x\,(\ell-x)\ \mathrm{d}G \qquad (1) \end{aligned}$$

のように記述できる．

式 (1) の計算過程で直線上の2点の関係を考えるが，図2のように領域が非凸な場合は直線の一部が領域外になってしまう．

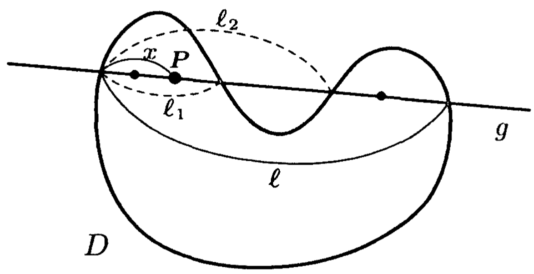

図2　非凸領域をよぎる直線

領域の外部が通行不能であるなど直線移動ができないときは，領域内の地点流動量分布は迂回の経路の取り方に依存するので，いまは領域外も直線移動が可能とする．

このとき地点 P を通過する移動のうち，直線 g で測ることができる流動量 $f^g(P)$ は図中の記号を用いて，

$$\begin{aligned} f^g(P) = &\int_{0\le t_1\le x}\int_{x\le t_2\le \ell_1} |t_2-t_1|\ \mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1 \\ &+\int_{0\le t_1\le x}\int_{\ell_2\le t_2\le \ell} |t_2-t_1|\ \mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1 \\ &+\int_{0\le t_2\le x}\int_{x\le t_1\le \ell_1} |t_2-t_1|\ \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \\ &+\int_{0\le t_2\le x}\int_{\ell_2\le t_1\le \ell} |t_2-t_1|\ \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \quad (2) \end{aligned}$$

と場合分けして計算すればよい．実際の流動量分布の計算結果については当日発表する．

3. 部分領域を通過する流動量

前節の議論では領域の外形が非凸の場合の流動量の計算を示したが，その際用いた場合分けさえ厳密に行えば対象領域が単連結でない場合など任意の領域形状の流動量分布計算について応用できることが分かる．

ところが，これまでの結果はあくまでも**ある地点を通過する量**に関する議論であり，現実の都市・地域の分析に際して**ある長さや面積を持った部分領域を通過する量**が必要になる場合があることは容易に想像がつく．

本節では領域内の微小な線分を通過する流動量を定式化しこれを利用することで対象領域内の部分領域を通過する流動量を求める．

式 (1) で示した地点流動量は正確には領域内の微小面積を持つ地域を通過する流動量であった．あるいは領域全体にわたって足しあげた，

$$\int_{P\in D} f(\boldsymbol{P})\ \mathrm{d}\boldsymbol{P} \tag{3}$$

があらゆる 2 点間の移動距離の総和に等しくなるような $f(\boldsymbol{P})$ を地点流動量と定義したと言い換えることもできる．

同じ発想で，図 3 のような曲線 C を通過する総流動量を求めるには，C の微小な区間 $\mathrm{d}s$ を線分で近似し，この線分を通過する流動量を $f_C(\boldsymbol{P})$ として，

$$F_C = \int_C f_C(\boldsymbol{P})\ \mathrm{d}s \tag{4}$$

のように曲線に沿って線積分すればよいことが分かる (ただし次元が異なる点については注意が必要)．

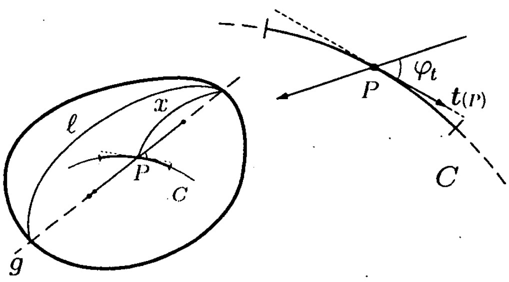

図 3　線分の方向と重み付け

$f_C(\boldsymbol{P})$ に関しては式 (1) で定式化した地点流動量を用いたいところだが，固定した線分を通過する流動量を導出するには，線分と流動が成す角度によってある種の重み付けを施さなくてはならない (文献 [3])．

点 $\boldsymbol{P}$ における接線と先ほど用いた直線 g が成す角度を φ_t とすると，g 上で測られる流動量 $f_C^g(\boldsymbol{P})$ は，

$$f_C^g(\boldsymbol{P}) = 2\,\ell\cdot x\,(\ell - x)\cdot \sin\varphi_t \tag{5}$$

となるから，やはり全方向の直線を考えれば $f_C(\boldsymbol{P})$ は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned} f_C(\boldsymbol{P}) &= \int_0^\pi f_C^g(\boldsymbol{P})\ \mathrm{d}\varphi_t \\ &= 2\int_0^\pi \ell\cdot x\,(\ell - x)\cdot\sin\varphi_t\ \mathrm{d}\varphi_t. \end{aligned} \tag{6}$$

図 4 のように曲線 C が閉じている場合も全く同じように考えてよい．曲線 C によって囲まれた領域を D' とすると F_C は D' の境界を通過する流動量となる．

いま仮に D' が凸の場合に限れば，直線が D' の境界 C と交わる回数は常に 2 回 (接する場合は考えなくてよい) なので，D' そのものを通過する流動量 $F_{D'}$ は，

$$F_{D'} = \frac{1}{2}\oint_C f_C(\boldsymbol{P}) \tag{7}$$

となる．

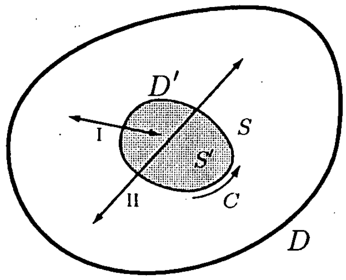

図 4　領域内の閉曲線 C と領域 D'

さらに，D' の内部に移動の起終点がないとき，すなわちもともと考えている都市領域 D が単連結でない場合は，さらに一方の端点だけ D' 内にあるような移動を減じて，

$$F_{D'} = \frac{1}{2}\oint_C f_C(\boldsymbol{P}) - S\cdot(S - S') \tag{8}$$

となる．ただし，S, S' はそれぞれ D, D' の面積とする．

4. おわりに

本稿では計算の過程においてあらゆる地点で滑らかな曲線を仮定したが，微分不可能な点が有限個であれば曲線を分割することで同様の議論を展開できる．

非凸領域の流動量分布に関して，一様な直線を用いた計算方法が一般図形の流動量分布にまで応用できた点は大きな成果であると考えている．これを実際に求めるには数値計算をしなければならないが，その過程で与える一様な直線の密度と誤差の関係などは今後検討すべき課題である．

また部分領域を「通過する」という表現を用いたが，実際の都市では鉄道の線路や大規模公園などの都市施設のように横断できないものが数多く存在する．つまり部分領域を通過する流動量とは，結果的に不通領域によって迂回を余儀なくさせられている移動量とその分布を評価するための数理モデルととらえることもできる．この迂回も考慮した流動量分布の導出についても今後検討したい．

参考文献

[1] 大津　晶，腰塚武志 (1998):都市内流動量分布に関する基礎的研究．日本都市計画学会学術研究論文集第 33 号，日本都市計画学会,pp.319-324

[2] 大津　晶，腰塚武志 (1999):有限な凸領域における流動量分布．OR 学会春期研究発表会アブストラクト集，pp.98-99

[3] 腰塚武志 (1976)，積分幾何学について (3):オペレーションズ・リサーチ,Vol.21,No.11,pp.654-659.