都市空間(不定形)における距離分布

01102840　筑波大学　*腰塚武志 KOSHIZUKA Takeshi
02004370　筑波大学　大津　晶 OHTSU Shou
02202930　筑波大学　傍島久弥 SOBAJIMA Hisaya

1. はじめに

最近，筆者は都市空間を移動の面から分析することが重要であると論じているが，中でも距離分布と流動量分布を基本的なものとして取り上げてきた．距離分布とは与えられた空間のあらゆる2地点の移動を前提とした距離の全体分布ということになる．数式で表現すれば与えられた空間に含まれる任意の2地点を $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$（ともにベクトル）とし，その距離を $d(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$ で表示すれば，距離 r 以下の2地点のペアーの量 $F(r)$ は

$$F(r) = \iint_{D(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)<r} \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 \tag{1}$$

と表現できる．ここでいう「距離分布」とは上記 $F(r)$ を r で微分した

$$f(r) = \frac{\mathrm{d}F(r)}{\mathrm{d}r} \tag{2}$$

をさすものとする．すなわちこれは距離が丁度 r の2地点ペアーの量を密度（4次元量を距離で割ったもの）で表現したものということができる．

2. 平面の2点と直線上の2点

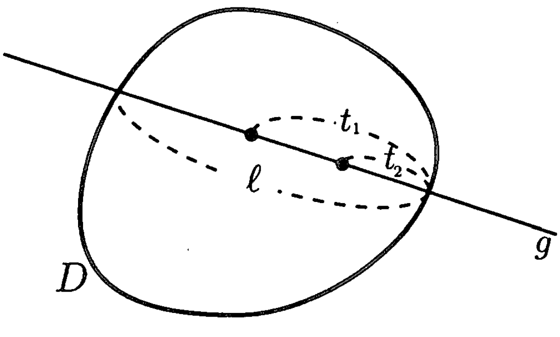

図 1: 一様な直線とその上の2点

ところで積分幾何学の分野で Crofton が導いた公式の拡張を議論するとき次のような変数変換が用いられる．すなわちそれは平面領域 D の2点 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ に関する積分は図1のようにこの領域 D を通る一様な直線 g を固定したとき，この直線上の2点 t_1, t_2 で

$$[\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1, \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2] = |t_1 - t_2| [\mathrm{d}G, \mathrm{d}t_1, \mathrm{d}t_2] \tag{3}$$

と考えることが出来る，というものである．これを用いれば2次元上の2点を，一様な直線ごとにこの直線上の2点で2点間の距離の重みを入れて考えていけばよいことになる(文献[3])．

そこでまず領域 D を通るある直線を固定し，この直線上の領域内での距離の累積分布を $F_g(r)$ とすれば，この固定された直線のこの領域 D の内部の長さを ℓ として

$$\begin{aligned} F_g(r) &= \iint_{|t_1-t_2|<r} |t_1 - t_2| \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \\ &= r^2 \ell - \frac{2}{3} r^3 \end{aligned} \tag{4}$$

が導かれる．これを r で微分すればこの固定された直線上の距離の分布が

$$f_g(r) = 2r(\ell - r) \tag{5}$$

と得られる．これを領域 D を通る一様な直線で積分してやればこの領域 D 内の2点間の距離の分布を出すことが出来る．

3. 非凸領域における距離分布

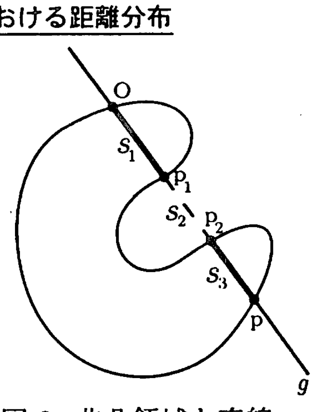

図 2: 非凸領域と直線 g

前述の式(5)は，計算に用いる直線の領域をよぎる部分がすべて領域に含まれる場合のものであった．し

かし対象領域が凸ではないと，図 2 のように，直線 g の部分が領域の外に出てしまう場合がある．そこでこのような場合についても式 (3) を用い，距離分布を導出しよう．本来の移動を考慮すれば，この領域内で収まるように迂回させた距離を考えなければならない．しかし今回はその前段階として，領域からはみ出した部分については考えないが，距離は直線距離（要するにそこは通れる）として計算する．

そこで図 2 のように直線が領域によって 2 つの線分に分断される場合を考え，起点 O を定め，直線と領域の交点を順番に P_1, P_2, P とする．線分 OP_1 を s_1, P_1P_2 を s_2, P_2P を s_3 と名付け，式 (4) にかける t_1, t_2 がそれぞれどこにあるかで距離分布を計算する．

まず t_1, t_2 共に s_1 にあるときは，式 (5) より OP_1 の長さを α_1 として，$0 < r < \alpha_1$ で

$$f_1(r) = 2r(\alpha_1 - r) \tag{6}$$

となる．同様に t_1 と t_2 が共に線分 s_3 にあれば，P_2P_3 の長さを α_3 とし，$0 < r < \alpha_3$ で

$$f_2(r) = 2r(\alpha_3 - r) \tag{7}$$

が得られる．

問題は t_1 が s_1 に t_2 が s_3 にというように別々にあるときである．対称性から t_1 が s_3 に t_2 が s_1 にある場合は上の時とまったく同じ事になるので 2 倍することにし，上の場合について考えていこう．まず s_1 と s_3 はどちらかが長いので $\alpha_1 < \alpha_3$ として一般性を失わない．t_1 が s_1,t_2 が s_3 にあるのでこの場合，$t_2 > t_1$ が成立するから

$$\begin{aligned} & F_g(r + \Delta r) - F_g(r) \\ & \quad = \iint_{r<t_2-t_1<r+\Delta r, t_1 \in s_1, t_2 \in s_2} (t_2 - t_1)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \end{aligned} \tag{8}$$

となり，上記の積分は 3 次元図形の体積と表現されるので Δr を用いて容易に計算することができる．紙面の都合により結果だけを述べると，s_2 の長さを α_2 として $\alpha_2 < r < \alpha_1 + \alpha_2$ のとき

$$f_3(r) = 2r(r - \alpha_2). \tag{9}$$

また，$\alpha_1 + \alpha_2 < r < \alpha_2 + \alpha_3$ のときは

$$f_3(r) = 2r\alpha_1. \tag{10}$$

さらに $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a$ とおいて $\alpha_2 + \alpha_3 < r < a$ のとき

となる．そして式 (6)，(7)，(9)，(10)，(11) を加えて

$$f_g(r) = f_1(r) + f_2(r) + f_3(r) \tag{12}$$

とすれば（ただし r が定められた範囲以外はそれぞれ $f(r) = 0$ とする）一様な直線を介した距離分布を求めることができる．

4. おわりに

以上述べた方法を用い，例を静岡県にとって距離分布を求めると図 3 のようになる．一様な直線をどの程度の密度で与えるのかという点については経験的なことしか言えないが，理論的に計算可能な図形において一応吟味した結果を用いている．

また対象領域内に限った移動ということになれば，図 2 で示されたような場合は迂回させねばならず，簡素な場合は前述の距離を迂回の分についてシフトすればよいが，場所によって迂回距離が異なると計算はもう少しややこしいものとなる．

そしてこの直線を一様に分布させてこのような計算を加えてやれば不定形における距離分布を計算することができる．

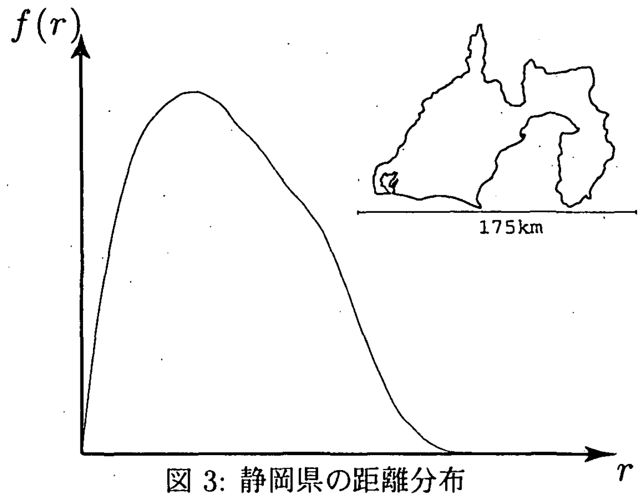

図 3: 静岡県の距離分布

参考文献

[1] 腰塚武志 (1998)：一様な直線を介して 4 次元を 2 次元から見る．日本 OR 学会秋季研究発表会アブストラクト集，pp.30-31.

[2] 谷村秀彦，腰塚武志他 (1986)：都市計画数理，朝倉書店.

[3] 腰塚武志 (1976)：積分幾何学について (3)．オペレーションズ・リサーチ，11 月号，pp.654-659.

[4] 腰塚武志 (1992)：都市域の流動に関する理論的考察．日本都市計画学会学術研究論文集 27 号，pp.343-348.