1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

総合信頼度を考慮したネットワーク設計問題

02102204 大阪大学 *小出 武 KOIDE Takeshi
01205144 鹿児島大学 新森 修一 SHINMORI Shuichi
01005195 大阪大学 石井 博昭 ISHII Hiroaki

1. はじめに

本研究では，ネットワーク信頼度の一つである総合信頼度 (all-terminal reliablity) がある一定水準を満たすネットワークのうち，設立コストが最小となるネットワークの形状を求める問題を扱う．総合信頼度の値を求める問題自体が$\#P$-困難なので、大規模なネットワークを対象とする場合，最適解を求めるのに非常に膨大な時間が必要となることが予想される．そのため，この問題は1980年代から広く研究され，多くの手法が提案されているが，そのほとんどは近似解を導出するものであった．そのような状況下で，Jan[2] は分枝限定法をベースとする最適解導出アルゴリズムを提案した．Jan のアルゴリズムは決して大規模なネットワークには適用できないが，近似アルゴリズムの精度を評価する意味でもその存在意義は大きい．ただし Jan のアルゴリズムは，ネットワーク中の枝が正常に機能する確率が全ての枝について同じである，という条件が必要である．

本研究では，Jan のアルゴリズムをベースにした，枝が正常に機能する確率が必ずしも全て同じではないネットワークに対しても適用できるアルゴリズムを提案する．また計算時間を短縮するためのいくつかの工夫も合わせて提案する．

2. モデルの設定

要素数 n の点集合 $V=\{v_1,\cdots,v_n\}$，要素数 m の枝集合 $E=\{e_1,\cdots,e_m\}$ からなる無向グラフを $G=(V,E)$ とする．ここで点の位置は固定で，点は常に正常に機能するとする．E は設立するネットワークに利用可能な枝の集合で，枝 $e\in E$ の利用コストを $c(e)$ とする．枝 $e\in E$が正常である確率 $p(e)$ は枝確率と呼ばれ，各枝の枝確率は互いに独立とする．グラフ G 中の全ての点が正常な枝によって連結になる確率を総合信頼度（all-terminal reliability：全点信頼度とも言う）と呼び，$Rel(G)$ で表す．非連結グラフの総合信頼度は0なので、G は連結グラフと仮定する。また自己閉路は総合信頼度に何の寄与もないので，G は自己閉路を持たないと仮定する．

設立するネットワークが満たすべき信頼度の基準を $P_0(>0)$ とする．x_iを，枝 e_iを利用するときは1，そうでないときは0をとる 0-1 変数とする．利用される枝のみで構成されるネットワークを $G_x=(V,E_x)$ とする．つまり，$E_x=\{e_i|x_i=1,i=1,\ldots,m\}$ とする．すると，我々の考える問題は以下のように表せる．

問題 MP

$$z^*=\mathrm{Min.}\sum_{i=1}^{m}c(e_i)\cdot x_i \tag{1}$$

subject to :

$$Rel(G_x)\geq P_0, \tag{2}$$

3. Jan のアルゴリズム

この章では枝確率が全て同一であると仮定する．以下に Jan のアルゴリズムを示す．

アルゴリズム JAN
begin
　$l:=a^*, z^*:=\infty$
　do
　　$z(l)$ by Algorithm JANSUB(l)
　　if $z(l)<z^*$ **then** $z^*:=z(l)$
　　$l:=l+1$
　while $\underline{z}(l)<z^*$
　output the optimal value z^*
end

ここで a^*は制約条件 (2) を満たす最小枝数の下界で，以下の手順で求める．まず次の問題 $R(l)$ を考える．

問題 $R(l)$

$$r(l)=\mathrm{Max.}\ Rel(G_x) \tag{3}$$

subject to :

$$\sum_{i=1}^{m}x_i=l \tag{4}$$

明らかに，$r(0)=r(1)=\cdots=r(n-1)=0$ である．Jan は [1] にて，$r(n),r(n+1),r(n+2)$ の値と，$r(n+3),\ldots,r(m)$ の上界を計算する手法を提案している．それらの値を改めて $\bar{r}(l)\ (l=0,1,\ldots,m)$ とおくと，a^*は，

$$\bar{r}(a^*-1)<P_0\leq\bar{r}(a^*) \tag{5}$$

を満たす値となる．ただし，[1] で提案した方法は，枝確率が全て同一であるという条件が必要である．

$z(l)$ は問題 MP に式 (4) を制約条件として追加したときの最適値で，分枝限定法を利用したアルゴリズム JANSUB(l)（詳細は紙面の都合上省略）により算出される．$\underline{z}(l)$ は $z(l)$ の下界である．アルゴリズム JANSUB(l) は深さ lの分枝図を構築し，その中から最適解 $z(l)$ を見つける．例として，あるネットワークと，そのネットワークに対しアルゴリズム JANSUB(3), JANSUB(4) を適用したときの分枝図を図 1に示す．ネットワーク，および分枝図中の番号は枝の番号を表す．分枝図において，各点は，根からその点へのパス上に存在する枝を利用し，その他の枝は利用しないという選択を表す．従って，葉が制約条件 (4) を満たす選択になり，制約条件 (2) を満足する最小コストの葉が $z(l)$ になる．制約条件 (2) の充足性を調べるためには総合信頼度を評価する必要があるが，連結性や総合信頼度の上界を利用して，なるべく総合信頼度を計算する回数を減少させている．ここで用いる上界算出アルゴリズムも，枝確率が全て等しいという条件を必要とする．

4. アルゴリズムの拡張

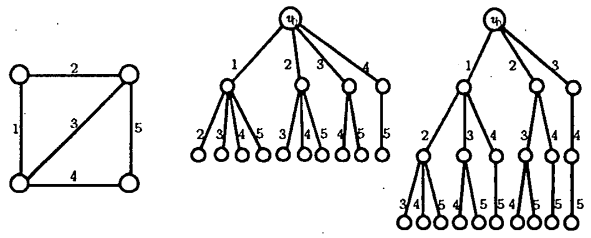

図 1: ネットワーク例と分枝図

Jan のアルゴリズムを枝確率が同一ではないネットワークに適用できないのは，a^* と総合信頼度の上界を求めるアルゴリズムが実行できないためである．a^* に関しては，$r(l)$ の真値またはその上界を導出する必要がある．枝確率が異なる場合においても明らかに $r(0) = r(1) = \cdots = r(n-2) = 0$ である．$r(n-1)$ は形状が極大木になるので，枝確率に対し最大木アルゴリズムを利用すれば導出可能である．$r(n)$ 以降は上界を求める．ここで次の定理を利用する．

定理 1 p_{max} を G において最大の枝確率とする．グラフ G の全ての枝確率を p_{max} にしたグラフを G' とすると，次式が成立する［総合信頼度の単調性］．

$$Rel(G') \geq Rel(G) \tag{6}$$

G' 中の枝確率は全て同一なので，[1] の方法が適用可能となる．定理 1 から，G' に対する $r(l)$ $(l = n+1, \ldots, m)$ は，G に対する $r(l)$ の上界になるので，式 (5) により a^* を導出できる．

総合信頼度の上界については，定理 1 から，$Rel(G')$ の上界が $Rel(G)$ の上界となる．

5. 計算時間短縮のための工夫

5.1 アルゴリズムの構造

制約条件 (4) を満たす最小枝数とその下界である a^* とにギャップがある場合，アルゴリズム JAN は制約条件 (4) を満たす葉が一枚もない分枝図内を探索することが起こり，その場合，分枝図内の全ての葉を探索する結果となり，非常に計算時間を費やすことになる．枝確率が同一でない場合，同一である場合と比較して a^* の精度が悪くなるため，このようなケースがより多く起こることが予想される．アルゴリズム JAN は制約条件 (4) を追加して，問題 MP を複数の子問題に分割しているが，この子問題への分割を中止すればこのようなケースは生じなくなる．

5.2 総合信頼度の上界

a^* と同様，前章の方法で得られる総合信頼度の上界の精度はあまり期待できないので，別の手法により得られる上界も合わせて評価することにする．

X を V の部分集合，$\overline{X}$ を X の補集合とする．また $(X, \overline{X})$ を枝の一方の端点が X，他方が $\overline{X}$ に属する枝の集合とすると，$(X, \overline{X})$ は最小カットとなる．

定義 1 2 つの最小カット $(X, \overline{X})$，$(Y, \overline{Y})$ に対し，$X \cap Y$, $X \cap \overline{Y}$, $\overline{X} \cap Y$, $\overline{X} \cap \overline{Y}$ の全てが空集合でないとき，この 2 つのカットは交わる (*crossing*) という．互いに交わらない $n-1$ 個の最小カットを *cut basis* と呼ぶ．

定理 2 G が cut basis $\{C_1, \ldots, C_{n-1}\}$ を持つならば，次式が成立する．

$$Rel(G) \leq \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \prod_{e \in C_i} (1 - p(e))). \tag{7}$$

式 (7) を利用すれば，枝確率は必ずしも同一でないネットワークの総合信頼度の上界を求めることができる．ただし総合信頼度の上界の評価は極めて頻繁に行うので，cut basis を短時間で構成する必要がある．$C(v)$ を点 v を端点とする枝の集合とすると，異なる 2 点 v と u に対し，$C(v)$ と $C(u)$ は明らかに交わらない．よって，1 つの点以外の $n-1$ 個の点に関する $C(v)$ を集めれば cut basis になる．上界の精度を上げるため，次のように cut basis を構成する．

1. $\forall v \in V$, 次の値を計算する．

$$p(C(v)) \equiv 1 - \prod_{e \in C(v)} (1 - p(e)) \tag{8}$$

2. $p(C(v))$ が最大の点を除き，全ての点に関する $C(v)$ を集める．

5.3 総合信頼度の計算

分枝図内のある点を v，その父を u，$G(v) = (V, E(v))$, $G(u) = (V, E(u))$ をそれぞれ点 v と u が表す選択で利用された枝により構成されるグラフとする．すると u と v を端点とする枝 e を用いて，$E(v) = E(u) \cup \{e\}$ と書けるので，

$$\begin{aligned} Rel(G(v)) &= p(e)Rel(G(v) \cdot e) + (1 - p(e))Rel(G(v) - e) \\ &= p(e)Rel(G(v) \cdot e) + (1 - p(e))Rel(G(u)). \end{aligned} \tag{9}$$

従って，もし $Rel(G(u))$ が既に計算済みであれば，$Rel(G(v))$ そのものを計算する代わりに $Rel(G(v) \cdot e)$ を計算すれば $Rel(G(v))$ を求めることができる．$G(v)$ と $G(v) \cdot e$ の枝数の差はたかが 1 だが，総合信頼度を求める問題は#P-困難であり，かつ総合信頼度の計算回数が多くなる場合もあることを考えると，この差が決して小さくない場合もあることが予想される．

6. 数値実験結果

4 章で述べた方法で拡張されたアルゴリズムと，5 章で述べたいくつかの工夫を加えたアルゴリズムとで比較実験を行った．紙面の都合上，数値結果は当日発表する．

なお本研究は、文部省科学研究費（番号 10205216）の援助を受けたものである。

参考文献

[1] R. -H. Jan, Design of reliable networks, *Computers and Operations Research* **20** (1993) 25-34.

[2] R. -H. Jan, F. -J. Hwang and S. -T. Chen, Topological optimization of a communication network subject to a reliability constraint, *IEEE Trans. Reliability* **42** (1993) 63-70.