1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

計り直しの問題

01204194 流通科学大学 ＊ 三道 弘明
01400053 愛知工業大学 中川 覃夫
日本油脂㈱ 太田 俊彦

1. はじめに

化学薬品を量産する生産工程の最終段階で，袋詰めにされた製品の重量を測定し，その測定結果を袋に記載するという工程がある．この計量工程では，製品の重量が元来大きい関係もあり，秤自身に狂いが生じることが少なくない．狂いが発生した秤で製品を計量した場合，製品に記載された重量と実際の重量とが一致しないこととなる．以下ではこのような製品を不良品と見なすこととする．

一方，秤に対しては，毎朝，毎晩点検，調整が行われており，この点検，調整の段階で初めて秤の狂いが検出される．夜の点検，調整の段階で秤に狂いが検出されると，その日一日に計量した製品のすべて，あるいは一部の計り直しが行われることとなる．このとき，不良率を一定値以下にするために必要な計り直しの割合を求めることが問題となる．また経済的効率を重視した場合の最適な計り直しの割合を求めることにも意義がある．

なお，計り直しの終了後には，秤の点検，調整を行うことなく，そのまま製品を出荷するものとする．従って，計り直しの途中で再度秤に狂いが生じた場合には，その時点以降に計量した製品はすべて不良品のまま出荷されることとなる．また，計量の対象製品は離散量であるが，その量が十分に大きいことからここでは連続量として扱うこととし，一日に計量する製品量をTと書く．さらに，秤の点検，調整後，計量した製品量がtに到達するまでに秤に狂いが生じる確率を，分布関数$F(t)$で表す．

2. 方策と目的関数

2.1 方策

[方策]

一日の終わりに行われる秤の点検，調整時点で秤に狂いが検出された場合，その日一日に計量した製品量Tのうち，最終計量製品から割合$\beta(0 \leq \beta \leq 1)$だけ遡って計り直しを行うという方策を考える．

なお上に述べた方策で，$\beta = 0$の場合には一切計り直しを行わない，$\beta = 1$は一日の全製品を計り直すことを意味している．

2.2 不良率

秤が製品量$t \in (0, (1-\beta)T]$を計量した時点で狂う場合を考える．この場合，$[(1-\beta)T - t]$なる量は計り直されないので，不良品のまま出荷されることとなる．しかし，βTなる量は計り直され，このうち不良品のまま出荷される量の期待値は次式で与えられる．

$$0 \times F(\beta T) + \int_0^{\beta T} (\beta T - t) dF(t) = \int_0^{\beta T} F(t) \quad (1)$$

よって，秤が時刻$t \in (0, (1-\beta)T]$で狂っているときの不良品の量の期待値は

$$\begin{aligned} r_1(\beta) &= \int_0^{(1-\beta)T} [(1-\beta)T - t] dF(t) \\ &\quad + F[(1-\beta)T] \int_0^{\beta T} F(t) dt \end{aligned} \quad (2)$$

となる．

これに対し，秤が量$t \in ((1-\beta)T, T]$を計量した時点で狂う場合には次のようになる．最初の$(1-\beta)T$なる量は，秤が正常であるときに計量されているので，良品である．しかし，βTなる量が計り直され，このうち不良品のまま出荷される量の期待値は式 (1) より$\int_0^{\beta T} F(t)dt$である．よって，秤が量$t \in ((1-\beta)T, T]$を計量した時点で狂う場合の不良品の量の期待値は

$$r_2(\beta) = \{F(T) - F[(1-\beta)T]\} \int_0^{\beta T} F(t) dt \quad (3)$$

となる．

以上のことから，上に述べた方策の下での不良率$Q(\beta)$は

$$\begin{aligned} Q(\beta) &= \frac{r_1(\beta) + r_2(\beta)}{T} \\ &= \frac{\int_0^{(1-\beta)T} F(t)dt + F(T) \int_0^{\beta T} F(t)dt}{T} \end{aligned} \quad (4)$$

となる．よって，$Q(\beta)$ を最小にするような $\beta=\beta^*$ が存在すれば，これが不良率を最小にする最適計り直し量の割合である．

2.3 期待費用

不良品を市場に出荷した場合の不良品1単位当たりに要する費用を c_1 とする．また計り直しをする際，製品1単位当たりに必要な費用を c_2 とする．但し，$c_2 < c_1$ と仮定する．このとき，計り直しする割合を β とすると，期待費用は

$$\begin{aligned} C(\beta) & \\ = \; & c_1\left[\int_0^{(1-\beta)T} F(t)dt + F(T)\int_0^{\beta T} F(t)dt\right] \\ & +c_2\beta T F(T) \end{aligned} \tag{5}$$

で与えられる．よって $C(\beta)$ を最小にするような $\beta=\beta^{**}$ が経済的計り直し量の割合を与える．

3. 最適方策

3.1 最小不良率

式(4)の不良率を最小にするような計り直しの割合 $\beta=\beta^*$ を求める．

$$Q(0) = Q_0 = \frac{\int_0^T F(t)dt}{T} \tag{6}$$

$$Q(1) = Q_1 = \frac{F(T)\int_0^T F(t)dt}{T} \tag{7}$$

$$Q'(\beta) = F(T)F(\beta T) - F[(1-\beta)T] \tag{8}$$

$$Q'(0) = -TF(T) < 0 \tag{9}$$

$$Q'(1) = F^2(T) > 0 \tag{10}$$

より，$Q'(\beta)$ は β の増加関数であり，その値は負から正に唯一度だけ変化する．従って，不良率 $Q(\beta)$ を最小にする $\beta=\beta^*(0<\beta^*<1)$ が唯一存在する．

3.2 不良率に上限がある場合

許容不良率を α とするとき，$Q(\beta)\le\alpha$ を満足した上で，計り直し量を最小にするような割合 β_α は，3.1の結果から次のようになる．

(1) $\alpha \ge \int_0^T F(t)dt/T$ ならば，$Q(\beta)\le\alpha$ for $0\le\beta\le 1$ が成立し，$\beta_\alpha=0$ である．すなわち計り直しは必要ないこととなる．

(2) $\int_0^T F(t)dt/T < \alpha < F(T)\int_0^T F(t)dt/T$ である場合，$Q(\beta)=\alpha$ を満たす唯一の $\beta_\alpha(0<\beta_\alpha<1)$ が存在する．

(3) $\alpha \ge F(T)\int_0^T F(t)dt/T$ のときには，次のような場合分けが必要である．

(a) $Q(\beta)=\alpha$ となる β が2つ存在するとき，小さい方を β_α とする．

(b) $Q(\beta)=\alpha$ となる β が唯1つの場合には，それが β_α である．

(c) $Q(\beta)=\alpha$ が解をもたないときには，計り直しをしても不良率を α 以下に抑えることはできない．

3.3 経済的計り直し量

式(5)より

$$C(0) = c_1\int_0^T F(t)dt \tag{11}$$

$$C(1) = F(T)\left[c_0\int_0^T F(t)dt + c_2 T\right] \tag{12}$$

を得る．さらに，$C'(\beta)\ge 0$ は

$$\frac{F[(1-\beta)T]}{F(T)} - F(\beta T) \le \frac{c_2}{c_1} \tag{13}$$

に等価である．式(13)左辺を $L(\beta)$ とおくと

$$L(0) = 1 > \frac{c_2}{c_1} \tag{14}$$

$$L(1) = -F(T) < 0 \tag{15}$$

$$\begin{aligned} L'(\beta) &= -T\left[\frac{f[(1-\beta)T]}{F^2(T)} + f(\beta T)\right] \\ &< 0 \end{aligned} \tag{16}$$

が成立する．故に，不等式(13)を満たす最小の $\beta=\beta^{**}$ が唯一存在し，それが $C(\beta)$ を最小にするという意味で経済的計り直し量の割合を与える．

4. 数値例

紙数の関係上，数値例は当日報告させて頂く．