1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

# 保証期間延長契約に関する研究

02800014　流通科学大学大学院　＊ 林坂　弘一郎　RINSAKA Koichiro
01204194　流通科学大学情報学部　三道　弘明　SANDOH Hiroaki

## 1. はじめに

Asgharizadeh ら [1,2] は信頼性を考慮した代理業者と顧客の保守サービス契約問題を取り扱った．本研究では保証期間 [3] を陽に考慮し，更にこの保証期間を延長する契約について考える．

## 2. モデル

システムの導入後の保証期間を $L_1(>0)$ とする．この保証期間中にシステムが故障すればメーカ，あるいは保守代理業者（以降，保守代理業者と呼ぶ）が無料で保守を行う．保証期間以降，保守代理業者は以下の2つのオプションを提供していると仮定する．

**(1) オプション $A_1$**　保守代理業者は固定料金 $P(>0)$ で保証期間を延長して $L_2(>L_1)$ の間，保証を行う．この延長された保証期間中，保守代理業者はすべての故障に対して無料で保守を行う．なお，延長された保証期間終了後は次のオプション $A_2$ と同様となる．

**(2) オプション $A_2$**　保守代理業者は保証期間後，1つの故障当たり $C_s(>0)$ の料金で保守を行う．

また，各オプションの下での期待効用が負となる場合，顧客はオプション $A_0$(システムを購入しない) を選択するとする．一方，顧客がシステムを運用する計画期間を $L(>L_1)$ とする．

システムが故障したとき，保守代理業者は小修理を行うと仮定する．したがって，保守後のシステムの信頼度は故障前のそれと等しくなる．ここでは故障分布 $F(x)$ に対して次式のワイブル分布を仮定する．

$$F(x)=1-e^{-\lambda x^m},\ m>0,\ \lambda>0 \tag{1}$$

なお，$m$ は形状パラメータ，$\lambda$ は尺度パラメータである．このとき，システムの運用期間中の総故障回数を $N$ とすると，次式が成立する．

$$\Pr\{N=n\}=\frac{(\lambda L^m)^n}{n!}e^{-\lambda L^m} \tag{2}$$

## 3. 顧客の期待効用

顧客がシステムの運用により得られる単位時間当たりの収益を $R(>0)$，システムの導入費用を $C_b(>0)$ とする．更に時刻 $L_1$，$L_2$ までの故障回数をそれぞれ $N_1$，$N_2$ とする．このとき，オプション $A_1$ を選択したときの顧客の金銭的利潤 $\omega(A_1)$ は

$$\omega(A_1)=\begin{cases} RL-C_b-P-C_s(N-N_2), & L>L_2 \\ RL-C_b-P, & L\le L_2 \end{cases} \tag{3}$$

となり，オプション $A_2$ を選択したときには次式となる．

$$\omega(A_2)=RL-C_b-C_s(N-N_1) \tag{4}$$

ここでは顧客の効用関数に絶対的危険回避度一定の効用関数 [4] を適用する．すなわち，オプション $A_k(k=0,1,2)$ の下での効用 $U[\omega(A_k)](k=0,1,2)$ として

$$U[\omega(A_k)]=\left[1-e^{-\beta\omega(A_k)}\right]\Big/\beta,\ \ \beta\ge 0 \tag{5}$$

を考える．ここに，$\beta$ はリスクパラメータである．このとき，顧客の期待効用はそれぞれ次のようになる．

$$\begin{aligned} &E[U(A_1;P,C_s)] \\ &\quad=\begin{cases} \frac{1}{\beta}\{1-\exp[-\beta(RL-C_b-P) \\ \quad -\lambda(L^m-L_2^m)(1-e^{\beta C_s})]\}, & L>L_2 \\ \frac{1}{\beta}\{1-\exp[-\beta(RL-C_b-P)]\}, & L\le L_2 \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} E[U(A_2;P,C_s)] =& \frac{1}{\beta}\{1-\exp[-\beta(RL-C_s) \\ &-\lambda(L^m-L_1^m)(1-e^{\beta C_s})]\} \end{aligned} \tag{7}$$

## 4. 保守代理業者の期待利益

保守代理業者の期待利益は顧客の行動に依存する．顧客がオプション $A_k$ を選択した場合の保守代理業者の利益を $\pi(P,C_s;A_k)(k=0,1,2)$ と書くこととする．$i$ 番目の故障に対する保守費用を確率変数 $C_{ri}(\ge 0)(i=0,1,2,\cdots,N)$ で表すと，顧客がオプション $A_1$ を選択したときの保守代理業者の利益は

$$\begin{aligned} &\pi(P,C_s;A_1) \\ &\quad=\begin{cases} P+C_s(N-N_2)-\sum_{i=0}^{N}C_{ri}, & L>L_2 \\ P-\sum_{i=0}^{N}C_{ri}, & L\le L_2 \end{cases} \end{aligned} \tag{8}$$

となり，期待利益 $E[\pi(P,C_s;A_1)]$ は

$$\begin{aligned} &E[\pi(P,C_s;A_1)] \\ &\quad=\begin{cases} P+C_s\lambda(L^m-L_2^m)-C_r\lambda L^m, & L>L_2 \\ P-C_r\lambda L^m, & L\le L_2 \end{cases} \end{aligned} \tag{9}$$

となる．ただし，$C_r$ は保守1回当たりの期待費用である．

一方，顧客がオプション $A_2$ を選択した場合の保守代理業者の利益 $\pi(P,C_s;A_2)$ は

$$\pi(P,C_s;A_2)=C_s(N-N_1)-\sum_{i=0}^{N}C_{ri} \tag{10}$$

となり，期待利益 $E[\pi(P, C_s; A_2)]$ として次式を得る．

$$E[\pi(P, C_s; A_2)] = C_s\lambda\left(L^m - L_1^m\right) - C_r\lambda L^m \quad (11)$$

## 5. 顧客の最適戦略

$E[U(A_1; P, C_s)] = E[U(A_2; P, C_s)]$ としてこれを $P$ に関して解くと，オプション $A_1$ と $A_2$ の無差別曲線が得られる．

$$P = \begin{cases} \frac{\lambda(L_2^m - L_1^m)}{\beta}\left(e^{\beta C_s} - 1\right), & L > L_2 \\ \frac{\lambda(L^m - L_1^m)}{\beta}\left(e^{\beta C_s} - 1\right), & L \le L_2 \end{cases} \quad (12)$$

ここで，式 (12) を $P = \Gamma(C_s)$ と書くこととすると，$P = \Gamma(C_s)$ は $C_s$ に関して単調増加である．

次に，$E[U(A_1; P, C_s)] = 0$ を $P$ について解き $P$ の留保価格を $P = \Psi(C_s)$ とすると

$$\Psi(C_s) = \begin{cases} RL - C_b + \frac{\lambda(L^m - L_2^m)}{\beta}\left(1 - e^{\beta C_s}\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad L > L_2 \\ RL - C_b, \qquad\qquad\quad L \le L_2 \end{cases} \quad (13)$$

となる．したがって，$\Psi(C_s)$ は $L > L_2$ のとき $C_s$ に関して単調減少となり，$L \le L_2$ のとき $C_s$ 軸と平行な直線となる．

更に，$E[U(A_2; P, C_s)] = 0$ として $C_s$ の留保価格を $\overline{C_s}$ とすると

$$\overline{C_s} = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{\beta(RL - C_b)}{\lambda\left(L^m - L_1^m\right)} + 1\right] \quad (14)$$

となり，$\overline{C_s}$ は $P$ 軸と平行な直線となる．ここで $\Omega_i (i = 0, 1, 2)$ を以下で定義する．

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \left\{(P, C_s) : P \ge \Psi(C_s),\ C_s \ge \overline{C_s}\right\} \\ \Omega_1 &= \left\{(P, C_s) : P < \Gamma(C_s),\ P < \Psi(C_s)\right\} \\ \Omega_2 &= \left\{(P, C_s) : P \ge \Gamma(C_s),\ C_s < \overline{C_s}\right\} \end{aligned}$$

このとき，顧客の最適戦略 $A^*(P, C_s)$ は

$$A^*(P, C_s) = \begin{cases} A_1 & \text{if } (P, C_s) \in \Omega_1 \\ A_2 & \text{if } (P, C_s) \in \Omega_2 \\ A_0 & \text{if } (P, C_s) \in \Omega_0 \end{cases} \quad (15)$$

となる．

## 6. 保守代理業者の最適戦略

保守代理業者の最適戦略は顧客の反応を考慮したうえで自身の期待利益が最大となるような $(P, C_s)$ の組み合わせである．つまり，それぞれの最適行動は保守代理業者が先導者，顧客が追従者となる Stackelberg ゲーム [5] の解で与えられる．

**オプション $A_1$ のとき** 顧客の選択がオプション $A_1$ のとき，保守代理業者の期待利益は式 (9) で与えた．

**(1) $L > L_2$** このとき，式 (9) を $P$，$C_s$ に関して偏微分するとそれぞれ正となることから，保守代理業者の期待利益は $\Psi(C_s)$ 上のある 1 点において最大となる．ここで，式 (13) を式 (9) の $P$ に代入し，$C_s$ に関して微分すると

$$\frac{dE[\pi(P, C_s; A_1)]}{dC_s} = \lambda\left(L^m - L_2^m\right)\left(1 - e^{\beta C_s}\right) < 0 \quad (16)$$

となる．ゆえにこの場合，保守代理業者の期待利益を最大にするのは $C_s^* \to \overline{C_s} + 0$ and $P^* \to \Psi(C_s^*) - 0$ のときである．

**(2) $L \le L_2$** このとき，式 (9) を $P$ に関して微分すると正となる．したがって，保守代理業者の期待利益を最大にするのは $C_s^* > \overline{C_s}$ and $P^* \to \Psi(C_s^*) - 0$ のときである．

**オプション $A_2$ のとき** $(P, C_s) \in \Omega_2$ のとき，顧客の選択はオプション $A_2$ となり，保守代理業者の期待利益は式 (11) となる．式 (11) を $C_s$ に関して微分すると正となる．したがって，保守代理業者の期待利益を最大にするのは $C_s^* \to \overline{C_s} - 0$ and $P^* > \Psi(C_s^*)$ のときである．

**オプション $A_0$ のとき** $(P, C_s) \in \Omega_0$ のとき，顧客の選択はオプション $A_0$ となり，保守代理業者は自身の期待利益を制御することはできない．

したがって，顧客がオプション $A_1$ 又は $A_2$ を選択した場合の保守代理業者の期待利益が両方共に，あるいは一方でも正となる場合，自身の期待利益が大きくなるオプションを顧客に選択させることが保守代理業者の最適戦略となる．以上のことから

$$\left[\begin{array}{c} C_s^* \to \overline{C_s} + 0 \text{ and } P^* \to \Psi(C_s^*) - 0 \\ \text{or} \\ C_s^* \to \overline{C_s} - 0 \text{ and } P^* > \Psi(C_s^*) \end{array}\right], \text{ if } L > L_2$$

$$\left[\begin{array}{c} C_s^* > \overline{C_s} \text{ and } P^* \to \Psi(C_s^*) - 0 \\ \text{or} \\ C_s^* \to \overline{C_s} - 0 \text{ and } P^* > \Psi(C_s^*) \end{array}\right], \text{ if } L \le L_2$$

のうち，期待利益の大きくなる $(P, C_s)$ の組み合わせが保守代理業者の最適戦略となる．

なお，紙数の都合上，数値例は当日発表させて頂く．

## 参考文献


[1] Augharizadeh E., Modelling and Analysis of Maintenance Service Contracts, *Doctoral Thesis, The University of Queensland*, 1997.

[2] Asgharizadeh E., and D.N.P. Murthy, Service Contracts: A Stochastic Model; *Proc. of the Second Australia-Japan Workshop on Stochastic Models in Engineering , Technology and Management*, Gold Coast, Australia, pp15-23, 1996.

[3] Blischke W.R. and D.N.P. Murthy, *Warranty Cost Analysis*, Marcel Dekker, 1993.

[4] Murthy, D.N.P. and V. Padmanabhan, A Continuous Time Model of Warranty, *Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University, Stanford, CA.*, 1993.

[5] Fundenberg D. and J. Tirole, *Game Theory*, MIT Press, 1995.