

# 遺伝的プログラミングによるカオス力学系の推定と その時系列予測への応用

\*九州大学経済学部 池田 欽一 IKEDA Yoshikazu  
九州大学経済学部 時永 祥三 TOKINAGA Shozo

## 1 まえがき

本報告では遺伝的プログラミング (GP: Genetic Programming) によるカオス力学系の推定と時系列予測手法を示し、応用問題を考察する。従来より、時系列より推定されたカオスアトラクタの形状に注目し、システムの挙動をアトラクタ上で再構成し時系列を予測する手法があるが、本報告ではシステムの方程式を、直接、遺伝的プログラミングにより推定する方法を用いる。これにより近似の精度が向上するとともに、より、決定論的な予測となる。

## 2 埋め込み定理とアトラクタ

カオスは方程式により決定論的に生成されるので、時刻ごとに観測データが一意に決まる。このことにより、カオス時系列の2つの時刻を同時に図として描くことにより明確な形状が観測される (アトラクタとよぶ)。アトラクタの存在を検証するための理論として Takens の定理がある。例えば、 $x, y, z$  の3次元空間の上をアトラクタが走っている場合に、変数  $x$  について過去の  $m$  個の値を組にして  $m$  次元ベクトル

$$x = (x(t), x(t-L), x(t-2L), \dots, x(t-(m-1)L))$$

を求め、これを  $m$  次元空間にプロットする (リターンマップ (return map))。ここで、 $L$  は時系列のサンプリングのための時間間隔である。このとき、 $m \geq 2n+1$  であれば、もとのアトラクタを  $m$  次元空間に埋め込むことができる ( $m$  を埋め込み次元とよぶ)。

Takens の定理により、埋め込み定理を用いて  $m$  次元空間に埋め込まれたデータが明らかな形状 (アトラクタ) をもっていれば、もとの時系列データがカオスであることが結論づけられる。これにより推定される次元を相関次元 (correlation dimension) とよぶ。相関次元の計算を1つのアルゴリズムとしてまとめたものが Grassberger-Procaccia 法とよばれるものである [1] (詳細は省略する)。

## 3 カオスと時系列予測

### (1) アトラクタ再構成による予測

カオスによる時系列予測の基本的な考えかたは、まずカオスアトラクタを求めておいて、アトラクタの上での将来の時刻における値 (位置) を近似的に求め、これを逆に時間域に写像してこのアトラクタ軌道を生成する力学モデルを推定することにより予測を行う方法である。このような方法をアトラクタ再構成による時系列予測手法とよんでおく。

もとのカオスのダイナミックスを

$$x(t+1) = f(x(t)) \quad (1)$$

としたとき、変数  $x(t)$  の微小変化 (摂動項) に対する  $f$  の変化である  $Df(x)$  がヤコビ行列である。

いま、時刻  $t$  までの時系列の観測データ  $x(t)$  が得られているとき、 $p$  時刻先の値  $x(t+p)$  を予測する問題を考える。アトラクタ上での  $x(t)$  に対応する点  $X(t)$  が与えられているときに、 $p$  時刻後のアトラクタ上での点  $X(t+p)$  を  $X(t)$  を用いて予測する問題となる。

$$X(t+p) = F(X(t)) \quad (2)$$

ここで、関数  $F(\cdot)$  は予測を行うための近似関数である。なお、再構成された空間では時間遅れ要素を用いて  $m$  次元空間を構成するが、ここでは、時刻  $t+p$  の時系列の値  $x(t+p)$  だけを予測すればよく、近似的な予測式は次のようになる。

$$x(t+p) = F(X(t)) \quad (3)$$

最も簡単な予測式として次のものを用いる。

$$x(t+p) = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k x(t-(k-1)L) \quad (4)$$

この式における係数は次のように決められる。まず、 $X(t)$  を除くすべての  $X_i(t)$  についての  $X(t)$  とのユークリッ

ド距離を計算し小さい順に  $n$  個の点を  $X(t)$  の近傍点として採用し,  $X_{r_1}(t), X_{r_2}(t), \dots, X_{r_n}(t)$  としておく。このもとで, 次の式を最小にする係数を求める。

$$\sum_{i=1}^n (X_{r_i}(t+p) - F(X_{r_i}(t)))^2 \rightarrow \min \quad (5)$$

Householder 法などを用いて係数  $a_k$  を計算し, この係数  $a_k$  を式 (3) に代入することにより, 時系列の値  $x(t+p)$  を予測することができる。

#### (2)GP による方程式推定

GP は木構造で表現された関数を最適化するための方法である。いま, 変数  $x(t)$  の離散系を考え, 左辺が  $x(t)$  であり, 右辺が  $x(t-1)$  などの時間遅れ要素からなる関数であるとする。関数は木構造で表現されている。遺伝的アルゴリズムの場合と同様に, 個体が1つの木構造(カオス)を記述する方程式体系に対応している。GA の場合と異なり, 木構造の一部を切断して別の木構造に接合するなどの操作が必要となるので, *StcckCount* というカウンタとスタック構造 (prefix representation) を用いて制御する。例えば, 方程式は次のような木構造となる。

$$(6.43x_1 - x_2)(x_3 - 3.54) \rightarrow - * 6.43x_1x_2 - x_33.54$$

また木構造は...スタックで表現される。

$$P1 = (a[1], b[2], a[3], -[2], +[1], c[2], -[1])$$

個体  $i$  の右辺で計算された  $x(t)$  の値が, 観測された時系列の良好な近似となっていれば適応度  $S_i$  をあげる。適応度を次で定義する。

$$S_i = \sum (x(t) - \tilde{x}(t))^2 / \sigma^2 \quad (6)$$

$\sigma^2$  は時系列の分散である。適応度の高い個体どうしの交差処理を行ない, 適応度の低い個体(木構造)をプールから除去する。

個体に対してパラメータを慎重に求めるための局所探索を用いる。これらを Global mutation, Local mutation として区別する。例題として Henon Map, Logistic Map に対するシステム方程式が正確に求まることが示される。

## 4 応用例

以下では, 2つのカオス時系列の予測手法 (AR, GP で区別) を比較する。代表例を表 1 に示す。sunspots, stock, ozone, ushiki, sales は, それぞれ, 太陽黒点, 株価, オゾン濃度, 感染症データ, 販売データである。

ただし, 前提条件としてアトラクタ再構成による予

測では参照とする時系列セグメントが多いほど(例えば 1000 以上) 精度があがる傾向になり, 逆に, GP による方法では用いるサンプル数が制限されている(例えば 50)。シミュレーションでは最も条件のよい場合の予測結果を示す。ただし株価は 100 程度のデータしかない。表 1 は予測誤差(予測誤差を標準偏差で割ったもの)の比較を示している。図 1 には GP による方程式推定により, 時系列を予測した例を示している。

これらより分るように, GP による予測では対象にあまり影響されないで予測されている。これはシステム方程式を, ほぼ同数のサンプルで推定している結果である。これに対して AR(アトラクタ再構成)では, サンプル数に大きく依存しており, 少ないサンプル数の株価予測は悪い。また, 変化の激しい時系列ではアトラクタ再構成手法では全般に予測が悪く, 変化に追従していないことがプロット結果から分る。

表 1. アトラクタ再構成法と GP 法の予測誤差

系列名	sunspots	stock	ozone	ushiki	sales
AR	1.31	0.47	1.68	1.89	0.29
GP	0.65	0.27	0.64	0.10	0.18

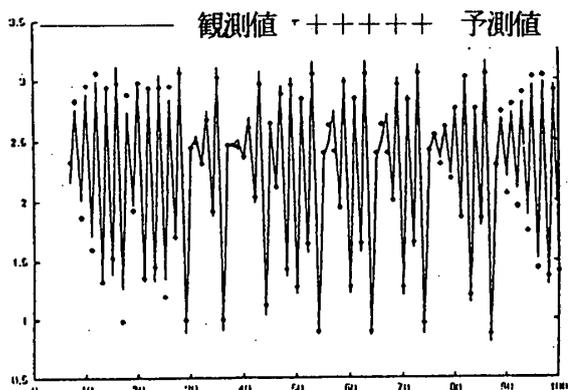


図 1. GP による方程式推定の時系列予測の例

#### 参考文献

- [1] P. Grassberger and I. Procaccia: "Measuring the strangeness of strange attractors", *Physica D* 9, pp.23-48 (1983)
- [2] A. J. Wolf, J. Swift and J. Vastano: "Determining Lyapunov exponents from a time series", *Physica D* 16, pp.285-317 (1985)
- [3] J. Jimenez, J. A. Moreno and G. J. Ruggeri: "Forecasting on chaotic time series: A local optimal linear reconstruction method", *Phys. Rev., A*, Vol. 45, No. 6, pp.3553-3558 (1992)
- [4] G. Sugihara and M. M. May: "Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series", *Nature*, 344, pp.734-741 (1990)