1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

双対錐と線形制約との関係及びその目標計画法への応用

熊本電波工業高等専門学校 ＊酒井貴司 SAKAI Takashi
熊本電波工業高等専門学校 森本義広 MORIMOTO Yoshihiro

1．序論

目標計画法は、与えられた制約条件の下で複数の目標に可能な限り近づけるための方法であり、産業界の様々な問題を解くために用いられている。本研究では、従来の目標計画法による定式化を改善した、新たな定式化方法について述べる。しかし、この定式化は$O(n!)$の数の制約式を含むので、これをそのまま用いることはできない。（ここでnは目標の数である。）そこで、双対錐と線形制約との関係を用いて、制約式の数を$O(n^2)$に減らすことにより、これを実用に耐えるものとしている。

2．目標計画法による問題の定式化

2.1 目標計画法の例及び従来の方法による定式化

目標計画法による問題の定式化の例として、人員配置意思決定問題（文献[1]）を考える。これは、n人の社員をm個の職種に割り振る際に、

① 企業側と社員側の双方から見た社員全体の満足度の総和をできるだけ目標値(f_0)以上にする
② 各職種に所属する社員の数をできるだけ目標値（定員ω_j）に近づける

という２つの目標をできるだけ満たすように人員配置を行うという問題である。

この問題を定式化するため、まずＡＨＰにより、各職種に対する各社員の満足度p_{ij}を求める。さらに、次のような決定変数x_{ij}を定義する。

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & :\text{社員 i が職種 j に所属する}\\ 0 & :\text{社員 i が職種 j に所属しない}\end{cases} \tag{1}$$

$$(i=1,2,\cdots,n \quad j=1,2,\cdots,m)$$

このようにすると、上記①,②の目標をできるだけ満足するという人員配置問題は次のように定式化される。

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}x_{ij}\lesssim f_0 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}\cong\omega_j \quad (j=1,2,\cdots,m) \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=1 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4}$$

$$x_{ij}\in\{0,1\} \tag{5}$$

ここで、ファジィ目標である（２），（３）式をさらに厳密に定式化することが問題となる。

（２）式のファジィ目標は満足度の総和fをできるだけ大きくする（つまり、$-f$をできるだけ小さくする）ものと解釈でき、（３）式のファジィ目標は定員との差$\mu_j=\left|\sum_{i=1}^{n}x_{ij}-\omega_j\right|$をできるだけ小さくするものと解釈できる。従って、より厳密に定式化すると、（２），（３）式は次のように書き換えられる。

$$\min: f_\mu=-f+\sum_{j=1}^{m}\mu_j \tag{6}$$

（実際には、fとμ_jが異なる次元であるため、そのまま足しあわせることはできない。そのため、文献[1]ではファジィ目標（２），（３）式をメンバシップ関数で表し、両者の和を最大にするように定式化する。）

2.2 従来の方法の問題点と新たな定式化方法

ここで、従来の定式化方法のうち（６）式について考えると、満足度の総和fが等しく、定員との差μ_jが次のようであった場合、目的関数f_μは等しくなる。

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	$\sum\mu_j$
①	12	0	0	0	0	0	12
②	2	2	2	2	2	2	12

このように、定員との差μ_jの最大値が12となる例①と、最大値が２となる例②の目的関数が等しくなるというのは、不適当なことである。この改善策として、（６）式における$\sum\mu_j$を$\max\mu_j$に置き換えることが考えられる。ところがこれは、次のような場合に問題となる。

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	$\max\mu_j$
②	2	2	2	2	2	2	2
③	2	0	0	0	0	0	2

このように、定員との差μ_jの和が12となる例②と、和が２となる例③の目的関数が等しくなるというのは、やはり不適当なことである。

以上に述べたような従来の方法の欠点を考慮し、新たな定式化方法として（６）式を次のように置き換えることを提案する。

$$\min: f_\mu=-f+\max_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\in P}\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j\mu_j$$

$$P=\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m)\,|\,(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m)\text{は}\ P_0=(\varepsilon_{01},\varepsilon_{02},\cdots\varepsilon_{0m})\text{を並べ替えたもの}\} \tag{7}$$

このとき、例①～③のそれぞれについて、（７）式右辺の第２項（f_dで表す）は次のようになる。

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	f_d
①	12	0	0	0	0	0	72
②	2	2	2	2	2	2	42
③	2	0	0	0	0	0	12

[$P_0=(6,5,4,3,2,1)$の例]

このように、f_dの値は例①と例②，例②と例③で後者が小さくなっており、これは上記の欠点が改善されたことを示している。

ここで、（７）式は次のように変形できる。

$$\min: f_\mu=-f+f_d \tag{8}$$

$$\text{制約条件}\quad f_d\geq\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j\mu_j \quad [(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m)\in P] \tag{9}$$

P_0の要素が相異なるときPの要素数は$m!$であるから、（９）式には$m!$個の制約式が含まれることになる。従って、これをそのまま用いると、到底実用にはならない。そこで、制約式の数をいかにして減らすかが次の問題となる。

3．双対錐と線形制約との関係

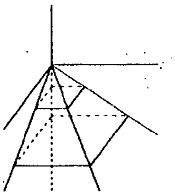
任意の集合$S\subset R^n$に対して

$$S^*=\{\mathbf{z}\in R^n\,|\,(\mathbf{z},\mathbf{x})\leq 0,\forall\mathbf{x}\in S\} \tag{10}$$

をSの双対錐という。次に、双対錐と線形制約との関係を、１つの例を用いて示す。

（錐 C ）

$$\begin{aligned} -x_1 \quad\quad &\le 0 \\ -x_2 \quad &\le 0 \\ x_1 \quad + x_3 &\le 0 \\ x_2 + x_3 &\le 0 \end{aligned}$$

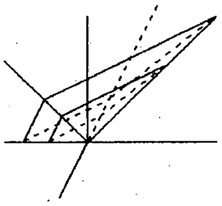


$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = y_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y_4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$

（ C の双対錐 C^* ）

$$\begin{aligned} -x_3 &\le 0 \\ x_1 \quad -x_3 &\le 0 \\ x_2 - x_3 &\le 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\le 0 \end{aligned}$$



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = y_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y_4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$

この図から、錐 C を表す不等式とその双対錐 C^* を表すベクトル、錐 C を表すベクトルとその双対錐 C^* を表す不等式がそれぞれ対応していることがわかる。（例えば C の不等式 $1x_1 + 0x_2 + 1x_3 \le 0$ は、C^* のベクトル $(1 \ \ 0 \ \ 1)^T$ に対応している。）この関係を、以後「双対錐と線形制約との関係」と呼ぶことにする。

多くの場合、錐 C を表すベクトルの数が多項式オーダーであっても、錐 C を表す不等式の数は指数オーダーとなる。逆に言えば、（9）式のような、不等式の数が指数オーダーとなる錐であっても、多項式オーダーのベクトルにより表現できる場合がある。実は（9）式は多項式オーダーのベクトルにより表現できるが、直接それを見いだすのは容易なことではない。そこで、双対錐と線形制約との関係を用いると、比較的容易にそれを見いだすことができる。具体的な手順を述べると、次のようになる。

① （9）式によって表される錐、つまり

$$C = \{\mu \in R^{m+1} \mid \varepsilon\mu \le 0, \forall\varepsilon \in P \times \{-1\}\}$$

$$\text{ただし、} \begin{aligned} &\varepsilon = (\varepsilon_1 \ \ \varepsilon_2 \ \ \cdots \ \ \varepsilon_m \ \ -1) \\ &, \mu = (\mu_1 \ \ \mu_2 \ \ \cdots \ \ \mu_m \ \ f_d)^T \end{aligned} \qquad (11)$$

の双対錐は、双対錐と線形制約との関係により、

$$C^* = \{\mu \in R^{m+1} \mid \mu = \sum_{\varepsilon \in P \times \{-1\}} y_\varepsilon \varepsilon^T, \mathbf{y} \ge \mathbf{0}\} \qquad (12)$$

となる。ここで、錐 C は指数オーダーの不等式により表現されているが、その双対錐 C^* は指数オーダーのベクトルにより表現されている。

② （12）式は次のような多項式オーダーの線形制約式により表現できることが、比較的容易に示される。

$$C^* = \{\mu \in R^{m+1} \mid \mu \text{は次の制約式（14）を満たす}\} \qquad (13)$$

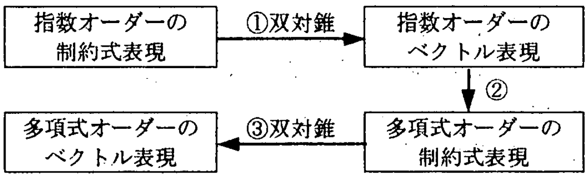
$$\begin{aligned} &\mu_j = \sum_{i=1}^{m} t_{ij} \quad (j = 1,2,\cdots,m) \\ &i(\varepsilon_{0,i} - \varepsilon_{0,i+1}) f_d + \sum_{j=1}^{m} t_{ij} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m) \\ &0 \le t_{ij} \le (\varepsilon_{0,i+1} - \varepsilon_{0,i}) f_d \quad (i = 1,2,\cdots,m \ \ j = 1,2,\cdots,m) \\ &\quad (\text{ただし、} \varepsilon_{0,m+1} = 0) \end{aligned} \qquad (14)$$

③ 最後に、双対錐と線形制約との関係を用いて、（14）式からもとの錐 C を求める。これは多項式オーダーのベクトルによる表現となり、変形を行うと次式になる。

$$C = \{\mu \in R^{m+1} \mid \mu \text{は次の制約式（16）を満たす}\} \qquad (15)$$

$$\begin{aligned} &f_d = -\sum_{i=1}^{m} i(\varepsilon_{0,i} - \varepsilon_{0,i+1})\pi_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} (\varepsilon_{0,j} - \varepsilon_{0,i+1})\lambda_{ij} \\ &\mu_j + \pi_i - \lambda_{ij} \le 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m \ \ j = 1,2,\cdots,m) \\ &\lambda_{ij} \ge 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m \ \ j = 1,2,\cdots,m) \end{aligned} \qquad (16)$$

この３つをまとめると、次のようになる。このようにして、指数オーダーの制約式表現を多項式オーダーのベクトル表現に変換できたことになる。



4．実験結果

（4），（5），（8），（16）式にいくつかのパラメータを付加した式を用いて、職種 $m = 6$ に社員 $n = 40$ 人を配属する実験を行った。また、比較のために従来の方法でも実験を行った。実験結果の一例を次表に示す。（スペースの関係で、一部のみである。）

新しい方法：実線　従来の方法：点線

社員＼職種	企画	総務	経理	営業	情報	資材
1	76.0	56.0	58.5	66.0	58.5	72.0
2	55.5	65.0	56.0	67.0	77.0	56.5
16	47.0	57.0	65.5	45.5	61.0	47.0
32	31.0	41.5	34.0	34.0	53.0	47.5
39	25.0	28.5	38.5	33.0	41.0	34.5
$n = 40$	37.0	34.0	45.0	28.0	22.0	23.0
決定人数(新)	5	9	5	7	9	5
決定人数(従)	5	9	6	7	7	6
定員	5	１０	5	7	7	6
定員の上下限	4～5	6～10	4～6	6～9	6～10	4～8
ずれの割合(新)	0	0.25	0	0	0.67	0.5
ずれの割合(従)	0	0.25	1	0	0	0

※ 満足度の総和　（新）2398.0（従）2397.0

この実験結果を見ると、おおむね満足度の高い職種が選ばれており、しかも各職種に所属する社員の数がほぼ定員に等しくなっている。これは、前述①，②の目標が同時に、可能な限り満たされていることを意味している。さらに、文献[1]による従来の方法と今回の実験結果を比較すると、従来の方法では経理の決定人数が上限ぎりぎりになっているが、新しい方法ではそのような職種がなく、どの職種の定員も平均的に満たされているといえる。満足度の総和についても新しい方法のほうが大きくなっていることを考えると、満足度と定員の２つの目標に対する結果が共に改善されており、この点で実験は成功であったと言える。ただ、２つの実験結果の間に著しい差が見られたわけではなく、パラメータによっては同じ解が得られることもあった。これは、今回用いたデータの満足度が各職種にうまくばらついており、従来の方法でも①，②の目標を難なく満たすことができるのが原因であると思われる。新しい方法は、満足度がある職種に集中していて、各目標を同時に満たしにくい場合に威力を発揮するだろう。

5．結論

本研究で提案した新たな定式化方法は、人員配置意思決定問題のみならず、目標計画法のさまざまな分野に応用できると思われる。また、双対錐と線形制約との関係を用いることにより、指数オーダーの制約式でも多項式オーダーの制約式で表せる場合があることも本研究で示すことができた。これにより、線形計画法で用いることのできる制約式の幅を、さらに広げることができるだろう。

参考文献

[1] 森本義広，他：人員配置意思決定問題のためのファジィ数理モデル，信学技報 ET97-107 (1998-01)