1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

凸計画問題に対する非線形近接点法を用いた分割アルゴリズム

京都大学情報学研究科 *京野 正宏 KYONO Masahiro
福島 雅夫 FUKUSHIMA Masao

1 序論

Martinet [3] によって提案され, Rockafellar [5] によって発展した近接点法は, 極大単調な点集合写像 T の零点を求めるアルゴリズムである. 最近では, Bregman 関数などの非線形関数を用いて, 近接点法を一般化する解析が盛んになされている. Bregman 関数を用いた非線型近接点法を凸計画問題に適用したアルゴリズムを, 本発表では特に, D 関数を用いた近接最小化法 (以下 PMD) と呼ぶ. D 関数, および Bregman 関数の定義は次節で述べる.

本発表では, 以下のような分離可能な構造をした凸計画問題に対して近接点法を用いることを考える.

$$\min f(x) + g(z) \quad \text{s.t.} \quad z = Ax.$$

ここで, $f : \Re^n \to (-\infty, +\infty]$, $g : \Re^m \to (-\infty, +\infty]$ は共に閉真凸関数で, A は $m \times n$ 行列である. このような問題に対し, 交互方向乗数法など, 問題の構造を利用した様々な, 近接点法を用いた分割アルゴリズムが提案されている. ここでは, Chen と Teboulle [1] が提案した予測子修正子近接乗数法 (以下 PCPM) と呼ばれるアルゴリズムに注目した. 本発表では, この PCPM に, PMD の考え方を用いたアルゴリズムを提案し, その収束性を示す.

2 準備

本節では, D 関数と Bregman 関数の定義, および, PMD の基本的な性質について述べる. まず, D 関数は次のように定義される.

定義 1 (D 関数) ある凸集合上で定義された微分可能な狭義凸関数 ϕ に対し, 次に定義される関数 D_ϕ を "*D* 関数" という.

$$D_\phi(u,v) = \phi(u) - \phi(v) - \langle \nabla\phi(v), u - v\rangle.$$

ここで, ϕ の狭義凸性より, $D_\phi(u,v) \geq 0, \forall u, v$ であり, かつ $D_\phi(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ である. これより D 関数は, 2 点 u, v 間の距離を一般化した関数と考えることができる.

次に, Bregman 関数の定義について述べる.

定義 2 *[6]* **(Bregman 関数)** 関数 $\phi : \bar{S} \to \Re$ が次の条件を満たすとき, ϕ は S を *zone* とする *Bregman* 関数という.

(i) $S \subseteq \Re^n$ は開凸集合.
(ii) ϕ は $\bar{S}$ において有限かつ連続.
(iii) ϕ は $\bar{S}$ 上で狭義凸.
(iv) ϕ は S 上で連続微分可能.
(v) 任意の点 $u \in \bar{S}$, $v \in \bar{S}$ と定数 α に対して, 右部分レベル集合 $\mathcal{L}(u,\alpha) \equiv \{v \mid D_\phi(u,v) \leq \alpha\}$ が有界.
(vi) 点列 $\{v^k\} \subset S$ は極限 v^∞ をもつ収束列とする. このとき $D_\phi(v^\infty, v^k) \to 0$ が成り立つ.

PMD は, 閉真凸関数 $h : \Re^n \to (-infty, +infty]$ を最小化する問題に対し, 現在の点 $\hat{u} \in \mathrm{dom}\, h$ を用いて, 次の反復点 u^+ を, 次のように生成する (cf. [2]).

$$\begin{cases} \gamma^+ \in \partial_\epsilon h(u^+), \\ c\gamma^+ + \nabla\varphi(u^+) - \nabla\varphi(\hat{u}) = 0. \end{cases}$$

ここで, $\phi : \bar{S} \to \Re$ は Bregman 関数, c は正の定数, $\mathrm{dom}\, h \subseteq \bar{S}$ とし, $\partial_\epsilon h$ は h の ϵ 劣微分を表す. このとき, 次の補題が成り立つ.

補題 1 *(cf. [2, Lemma 4.1])* ϕ を S ($S \subseteq \Re^n$) を *zone* とする *Bregman* 関数とする. このとき, $\forall u \in \mathrm{dom}\, h$ に対し,

$$c\{h(u^+) - h(u)\} \leq D_\phi(u,\hat{u}) - D_\phi(u,u^+) - D_\phi(u^+,\hat{u}) + c\epsilon$$

が成り立つ.

3 アルゴリズム

本節では, PMD の考え方を用いて PCPM を一般化したアルゴリズムを提案する. ただし, ここで提案するアルゴリズムで用いる Bregman 関数は, ある Bregman 関数 $\phi_0 : \bar{S} \to \Re$ を用いて, 次のように表されるものとする.

$$\phi(u) = \phi_0(u) + \frac{\mu}{2}\|u\|^2, \qquad (\text{ただし}, \nu > 0\ ).$$

これ以降, 新しいアルゴリズムを, 非線形予測子修正子近接乗数法 (以下 NPCPM) と呼ぶ. 以下に, NPCPM の流れを示す.

アルゴリズム NPCPM

ステップ 0: S_X, S_Z を zone として持つ Bregman 関数 φ_0, ψ_0 と正定数 μ と ν を選び,

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \frac{\mu}{2}\|x\|^2,$$
$$\psi(z) = \psi_0(z) + \frac{\nu}{2}\|z\|^2$$

とする. さらに, $\bar{c} := \min\{\sqrt{\nu}/2, \sqrt{\mu}/2\|A\|\}$ とし, 初期点 $(x^0, z^0, y^0) \in S_X \times S_Z \times \Re^m$, 実数 $\varepsilon \in (0, \bar{c}/2)$, 非負の数列 $\{a_k\}, \{b_k\}$ を選び, $k := 0$ とおく.

ステップ 1: 適当な終了条件を満たせば, 計算終了. そうでないなら, $\varepsilon < c_k < \bar{c} - \varepsilon$ を満たす c_k を1つ選び, 次式により p^{k+1} を定める.

$$p^{k+1} = y^k + c_k(Ax^k - z^k).$$

ステップ 2: 次式を満たす x^{k+1}, z^{k+1} を求める.

$$\begin{cases} \gamma^{k+1} \in \partial_{a_k} f^k(x^{k+1}),\ \delta^{k+1} \in \partial_{b_k} g^k(z^{k+1}), \\ c_k\gamma^{k+1} + \nabla\varphi(x^{k+1}) - \nabla\varphi(x^k) = 0, \\ c_k\delta^{k+1} + \nabla\psi(z^{k+1}) - \nabla\psi(z^k) = 0, \end{cases}$$

ただし, $f^k(x) = f(x) + \langle p^{k+1}, Ax\rangle,$
$g^k(z) = g(z) - \langle p^{k+1}, z\rangle.$

ステップ 3: 次式で y^{k+1} を定め, ステップ 1 に戻る.

$$y^{k+1} = y^k + c_k(Ax^{k+1} - z^{k+1}).$$

4 収束性の解析

本節では, NPCPM の収束性について述べる. なお, 以下では, $w = (x, z, y)$, $\phi(w) = \varphi(x) + \psi(z) + \frac{1}{2}\|y\|^2$ とする. まず, 収束性の証明に用いる補題を挙げる.

補題 2 *[4]* 非負の点列 $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$ が次を満たすとする.

$$\alpha_{k+1} \le \alpha_k + \beta_k,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k < \infty.$$

このとき, 点列 $\{\alpha_k\}$ は収束列である. ∎

次に, NPCPM の収束性を保証するため, 以下の仮定をおく.

(A1) 問題 (P) は最適解 (x^*, z^*) とそれに対応するラグランジュ乗数 y^* をもつ.

(A2) $\mathrm{dom}\, f \subseteq S_X$, $\mathrm{dom}\, g \subseteq S_Z$. が成り立つ.

(A3) φ, ψ は S_X, S_Z 上で essentially smooth.

(A4) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(a_k + b_k) < \infty$.

これらの仮定のもと, 先の補題を用いると次の定理が成立する.

定理 1 点列 $\{w^k\}$ は *NPCPM* で生成される点列とする. このとき, $\{w^k\}$ は *(P)* の解へ収束する. ∎

5 まとめおよび今後の課題

本発表では, PCPM と PMD に基づいた新しい分割アルゴリズム NPCPM を提案し, その収束性を示した. 今後の課題としては, NPCPM の収束速度の解析や計算機実験, さらにはより広いクラスの問題に対するアルゴリズムへの拡張などがあげられる.

参考文献

[1] G. Chen and M. Teboulle, "A proximal-based decomposition method for convex minimization problems," *Mathematical Programming*, Vol. 64, 1994, pp. 81-101.

[2] K. C. Kiwiel, "Proximal minimization methods with generalized Bregman functions," *SIAM Journal on Control and Optimization* Vol. 35, 1997, pp. 1142-1168.

[3] B. Martinet, "Regularisation d'inéquations variationnelles par approximations successive," *Revue Francaise d'Automatique et Informatique Recherche Opéretionnelle* Vol. 4, 1970, pp. 154-159.

[4] B. T. Polyak, *Introduction to Optimization*, Optimization Software Inc., New York, 1987.

[5] R. T. Rockafellar, "Monotone operators and the proximal point algorithm," *SIAM Journal on Control and Optimization* Vol. 14, 1976, pp. 877-898.

[6] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, "An inexact hybrid generalized proximal point algorithm and some new results on the theory of Bregman functions," manuscript, IMPA, Rio de Janeiro, 1998.