1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

ネットワーク信頼度計算における変換・分割の適用

02102204 大阪大学 *小出 武 KOIDE Takeshi
01205144 鹿児島大学 新森 修一 SHINMORI Shuichi
01005195 大阪大学 石井 博昭 ISHII Hiroaki

1 はじめに

ネットワークシステムの信頼度を測る尺度の一つである総合信頼度（all-terminal reliability）とは、確率グラフ中の全ての点が正常に機能している枝によって連結されている確率である。一般に、総合信頼度の値を求めるのに要する計算時間は枝の本数に対し指数的に増加する（*NP*-困難）ので、精度の良い境界値、特に下界を多項式時間で求めることが重要になる ([1]) 。

我々は与えられたネットワークの総合信頼度の下界を保証するネットワーク変換を提案した ([3])。この変換は各枝が正常に機能する確率が必ずしも同一でないネットワークに対しても適用可能である。本稿ではこの変換を包含するネットワーク変換を提案し、ネットワーク分割を併用することにより、下界の計算時間を減少させることが可能であることを示した。またこの変換を利用したアルゴリズムを示し、具体的にあるネットワークに対しアルゴリズムを適用し、その性能を評価した。

2 モデルの設定

要素数 n の点集合 $\{v_1,\cdots,v_n\}$、要素数 m の枝集合 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ からなる無向グラフを $G=(V,E)$ とする。グラフ中の各枝は正常に機能している状態（正常状態）と故障している状態（故障状態）の2つの状態があり、枝 $e\in E$が正常である確率（枝正常確率）を p_eとし、各枝の枝正常確率は互いに独立とする。また点は常に正常であると仮定する。このような確率グラフ G 中の全ての点が正常な枝によって連結になるとき、G で表現されるネットワークは正常であるという。ネットワークが正常である確率を総合信頼度（all-terminal reliability：全点信頼度とも言う）と呼び、$Rel(G)$ で表す ([1])。非連結な確率グラフの総合信頼度は常に 0 なので、今後扱うグラフを連結グラフと仮定する。

3 カットシフト変換

定義 1 グラフ $G=(V,E)$, $W\subset V$, $w\in W$を考える。このとき、$C=C(W:V-W)$ に属する全ての枝について、W側の端点をすべて wに移すグラフ変換をカットシフト変換といい、$CS(G,W,w)$ と表す。

カットシフト変換について以下の定理が成立する。

定理 1 確率グラフ $G=(V,E)$, $\forall W\subset V$, $\forall w\in W$ に対し、次の不等式が成立する [証明略]。

$$Rel(G)\geq Rel(CS(G,W,w)) \tag{1}$$

この定理により、$CS(G,W,w)$ の総合信頼度を多項式時間で計算可能ならば、G の総合信頼度の下界を多項式時間で計算可能である。

確率グラフ G の連結度が 1 の場合、以下の定理を用いて総合信頼度計算の時間を短縮することが可能である ([2])。

定理 2 グラフ $G=(V,E)$ が m 個のブロック（不可分成分）$B_1,\ldots,B_m$をもつとき、次の式が成立する [証明略]。

$$Rel(G)=\prod_{i=1}^{m} Rel(B_i) \tag{2}$$

従って総合信頼度の計算をする際には、予めブロックに分解し、各々のブロックについて総合信頼度を求めれば計算時間を短縮できる。以下確率グラフの連結度を 2 以上と仮定する。

カットシフト変換には、以下の性質がある。

性質 1 任意の $w\in W$に対して、$CS(G,W,w)$ は一定である。

性質 2 $CS(G,W,w)$ の連結度は 1 である。

カットシフト変換を連結度 2 以上の確率グラフに適用した場合、$CS(G,W,w)$ には少なくとも 2 つのブロックが存在する。そこで定理 2を用いて、$CS(G,W,w)$ の計算時間を短縮することが可能である。

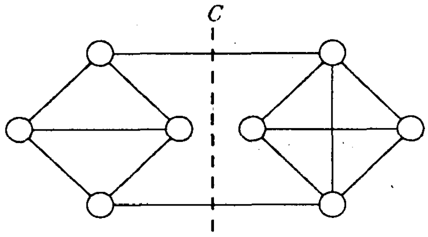

図 1: 採用したネットワーク

4 アルゴリズム

カットシフト変換を用いた $Rel(G)$ の下界を求めるアルゴリズム $REL\_CS(G)$ の概要を示す。

Procedure $REL\_CS(G)$
1. **if** G が「CS終了条件」を満足している **then**
   return $Rel(G)$ の下界;
2. $\exists W \subset V$, $\exists w \in W$に対し、$G \leftarrow CS(G, W, w)$;
3. **return** $\prod_{i=1}^{m} REL\_CS(B_i)$;
   ただし、$B_1, \ldots, B_m$は G のブロック。

上記アルゴリズムの性能を測るには以下の 2 つの事項を決定する必要がある。

(A) CS終了条件
確率グラフ G にカットシフト変換を適用することを終了させる条件。
(例) G の最小カットが一定以上
G が直並列グラフ

(B) Wの決定
G 中のどのカットセットを選択するか。
(例) G の適当な最小カット

この 2 つの事項をどう設定するかによって、得られる下界の精度、計算時間が異なる。

5 数値実験結果

図 1に示したネットワークにアルゴリズム REL_CS を適用し、その性能を評価した。「CS終了条件」は「$|W| \geq 2$ なる大きさ 2 のカットが存在しない」とした (すなわち、図中のCによる変換を 1 回適用するのみである)。図 2に REL_CSを適用した場合 (With CS) と、しない場合 (Without CS) との比較を示した。With CS の後の (L) は Wを Cの左側にした場合、(R) は右側にした場合である。ここでは全ての枝の枝正常確率を同一とした。また下界を求める手法としては、[2] で提案した直並列グラフによるエッジパッキング法を利用している。この場合においては、Wを左側にしたカットシフト変換が、より精度の良い下界を導出していることがわかる。

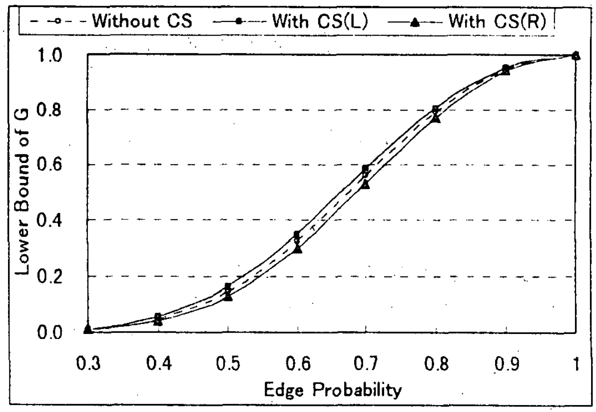

図 2: REL_CSの効果

また枝正常確率が枝ごとに異なる場合についても評価を行ったが、紙面の都合上、当日発表する。

6 まとめ

ネットワーク信頼度の下界を保証するカットシフト変換を提案し、カットシフト変換を利用すたアルゴリズムを提案した。このアルゴリズムを実行するには、2 つの事項を設定する必要があるが、適切に設定することにより、下界を計算する時間を短縮させ、より精度の良い下界を求めることが可能となる。効果的な設定方法については今後の課題である。

なお本研究は、文部省科学研究費 (番号 10680428) の援助を受けたものである。

参考文献

[1] Colbourn, C.J., Combinatorics of Network Reliability, Oxford University Press, New York, 1987.

[2] 小出, 新森, 石井, 直並列グラフを利用した all-terminal reliability の下界, 日本 OR 学会秋季研究発表会アブストラクト集, 256-257(1997)

[3] 小出, 新森, 石井, ネットワーク信頼度計算におけるネットワーク分割, 日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, 68-69(1998)