1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

設備更改のスケジューリング問題への基本分割の応用

大阪大学　岩田 覚　IWATA Satoru
大阪大学　*佐藤 全寛　SATO Masahiro
大阪大学　藤重 悟　FUJISHIGE Satoru

1. 序論

設備更改のスケジューリング問題とは，通信サービス等において，既存の設備を更改する際に，増収効果が最大となるように更改順序を決定する問題である．この問題は，とくにコンピュータネットワークや電話網等の通信サービスを対象として，須藤，井上 [5,6,7] によって提起された．

この種のスケジューリング問題を解くためには，各ユーザと各設備との利用関係を正確に把握する必要がある．本研究では両者の利用関係を 2 部グラフによって表現し，2 部グラフの分解原理としてごく前から研究されている基本分割の手法を適用する．特に，1 期間に 1 つずつユニットを更改する場合，基本分割の各成分毎の部分問題の最適解を合成することによって全体の最適更改順序が得られることを示す．

2. 問題の設定

通信サービスを利用するユーザに，より質の高いサービスを提供するために各期間 t 毎の予算制約 $q(t)$ 内で既存の通信網の交換機ユニットを順次更改する．利用する全てのユニット集合が更改し終わったユーザ x には，新しいサービスが提供でき，それ以降毎期間，一定の新たな収入 $p(x)$ を得る．ユニット y の更改費用 $c(y)$ は各ユニット毎に決まっている．計画が終了し，全ユニットを更改し終えるまでの収入の合計を最大にする更改順序を求めたい．

期間 t までに更改されたユニット集合を Y_t, ユニットの部分集合を Y，Y を更改した時に収入を得るユーザ集合を $X(Y)$ とすると問題は，各期間 t に対する Y_tを求める問題として，以下のように定式化できる．

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize} \quad & \textstyle\sum_t p(X(Y_t)) \\
\text{subject to} \quad & c(Y_t \backslash Y_{t-1}) \le q(t) \\
& (t = 1, 2, \cdots, T)
\end{aligned}
$$

3. 2 部グラフの基本分割

3.1. 基本分割の定義

この問題を解く手法として，各ユーザと各設備間の利用関係を 2 部グラフで表し (図 1 参照),

$$g(Y, \lambda) = c(Y) - \lambda p(X(Y))$$

という関数を定める．

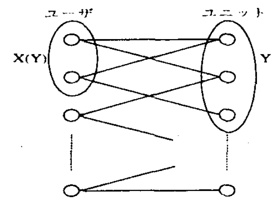

図 1: 利用関係を表す 2 部グラフ

ここで，λ を固定した時に g の値が最小となるユニット集合を，対応するλの小さいものから順に Y^k $(k = 0, 1, \cdots)$ とする．ただし，λ を固定して最小の値をとる $g(Y, \lambda)$ を結んだグラフに端点でのみ接する直線に対応するユニット集合は除く (図 2 参照).

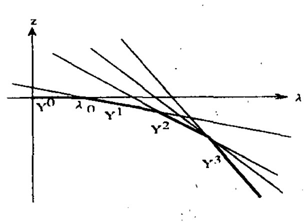

図 2: 直線 $z = g(Y, \lambda)$

この Y^kについて $Y^0 \subset Y^1 \subset \cdots$が成り立つ．ユーザ集合 U を $Y^k \backslash Y^{k-1}$ $(k = 1, \cdots)$ に分割することを２部グラフの基本分割という．

3.2. 基本分割を求めるアルゴリズム

ユーザの部分集合 X が利用する全てのユニット集合を$\Gamma(X)$ とすると，対 $(U, c(\Gamma(X)))$ はポリマトロイドとなる．

Step1 重みベクトル $p = (p(x)|x \in U)$ に関するポリマトロイド $(U, c(\Gamma(X)))$ の最適基 b^* を求める [1,4].

Step2 $b^*(x)/p(x)$ を単調非減少な系列に並べ替え，この値が等しい x 同士が基本分割の同じ成分同士となる．

＜計算量についての考察＞

単調パラメトリック最大流問題に関する Gallo,Grigoriads,Tarjan[3] の方法を用いると最大流を１回求めるのと，同じ計算量で最適基が求められる．従って，$n = |U| + |\Gamma(U)|$ とすると全体の計算量は $O(n^3)$ となる [2].

4. 最適更改順序の構造

ユニット集合 Y^kを更改した時の費用とその時の収入を投資，収入を軸とする折れ線グラフ上にプロットした点を線分で結んだ関数は区分線形凹関数となる (図３参照)．また Y^k以外のユニット集合 Y の更改費用とユーザ集合 $X(Y)$ からの収入は，各投資額における図３の折れ線グラフの値を越えない．

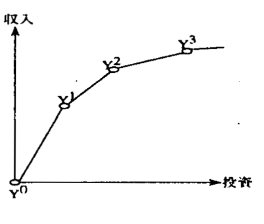

図 3: 投資·収入グラフ

このことから，基本分割を利用した更改順序の有用性が示唆される．実際，１期間に１ユニットを更改する問題に関して，以下の定理を得た．

定理 １期間に１ユニットを更改する場合，最適更改順序は $Y_{|Y^k|} = Y^k$ $(k = 0, 1, \cdots)$ を満たす．□

基本分割は，前述のように効率的に計算するアルゴリズムが知られているので，大規模なスケジューリング問題を解くための前処理として有効である．基本分割の各成分毎の部分問題の最適更改順序の求め方は今後の課題である．

一方，１期間に複数個のユニットが更改できる場合には，基本分割によって問題を分解しても最適更改順序が得られない例も存在する．しかしこの場合でも，ある程度近似解を得るための発見的手法として，基本分割を前処理として用いることは有用と思われる．

参考文献

[1] S. Fujishige: Lexicographically optimal base of a polymatoroid with respect to a weight vector, *Mathematics of Operations Research*, 5 (1980), 186–196.

[2] S. Fujishige: *Submodular Functions and Optimization*, North-Holland, 1991.

[3] G. Gallo, M. Grigoriadis, R. Tarjan: A fast parametric maximum flow algorithm and applications, *SIAM Journal on Computing*, 18 (1989), 30–55.

[4] N. Megiddo: Optimal flows in networks with multiple sources and sinks, *Mathematical Programming*, 7 (1974), 97–107.

[5] 須藤 純子, 井上 正之: 設備更改計画のグラフ理論的検討, 日本 OR 学会 1994 年度春季研究発表会アブストラクト集 (1994), 245–246.

[6] 須藤 純子, 井上 正之: 設備更改計画へのグラフ理論的アプローチ, 第 29 回 SSOR 予稿集 (1994), 50–55.

[7] 須藤 純子, 井上 正之: ２部グラフの分解理論を利用した設備更改計画問題の解法, 日本 OR 学会 1994 年度秋季研究発表会アブストラクト集 (1994), 116–117.