1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

多期間ポートフォリオ選択問題のモデル化について

京都大学 *橋本 貴志 HASHIMOTO Takashi
山下 信雄 YAMASHITA Nobuo
福島 雅夫 FUKUSHIMA Masao

1 はじめに

資産選択問題とは, 効用関数の最大化となるよう市場にある多数の資産に対して, 各資産への投資配分を決定する問題である. このような配分をポートフォリオと呼ぶ. 本論文では, 投資活動の開始時点 (期首) から投資活動の最終的な評価時点 (期末) までの各資産の収益に対する確率分布が既知であるとする.

これまでに, 期首においてポートフォリオを作成し, そのポートフォリオどおりに資産を保持し, 期末の時点でその資産の評価を行うような資産選択問題は, 非常に多くの研究が行われてきた. つまり, そのようなモデルにおいては, 期中に資産の再配分 (リバランス) を行わないことになっている. そのような簡単なモデル化のため, これまでに多くの理論的成果がえられている. 特に, CAPM などの理論が有名である. しかしながら, 長期の期間を考えれば, 期中において, ポートフォリオの変更を行わないことは, 収益やリスクの面からも, 有効なことだとは思われない. 短期間に大きく価格が変動する資産には, その変動を利用した方が, 収益を上げ, リスクを下げることができるはずである. なぜならば, 期中においても, ポートフォリオの変更ができるモデルにおいて, 期中でポートフォリオの変更を行わない解は, 1つの実行可能解になっているからである. そのような観点から, 期首から期末を, T期に分割し, 各期においてポートフォリを構成するモデルが提案されている. そのようなモデルとして, シナリオモデルが知られている [2]. シナリオモデルでは, ある期に対してある状態にあるとき, 次の状態がいくつか予想され, その状態に遷移する確率が既知であるとき, 最終状態に対する効用を最大化することを目的としている. そのため, 状態はツリー状になり, 問題はTの指数規模の変数を決定する問題となる. このため, 問題は, 非常に大きく難しく, これまでに, 並列計算を用いた手法などが提案されている [1]. しかしながら, どのような高速なコンピュータを用いたとしても, Tを大きくすると問題を解くことは不可能である.

本論文では, シナリオモデルをより簡易化することによって, 変数が期間数Tのオーダーとなるモデルを提案する.

2 将来の株価が過去の履歴に依存しない場合のモデル化

前節でも述べたように, 多期間の資産選択問題に対するシナリオモデルを用いた解法は, ツリーの分岐の数や期間の増大につれて, 指数関数的に変数の次元が大きくなるという欠点がある. この節では, その欠点をモデルの特徴を生かして克服したモデルを提案する.

公定歩合や為替などの経済状態が安定しているときの資産価格の変動を考えてみる. このとき, その資産はある確率微分方程式に従って変動していると考えることができる. この確率微分方程式を, 時間, 価格を離散的に近似すると, シナリオモデルのようなツリー構造をもったモデルをつくることができる. 例えば初期の株価の値を 1000 円と, 価格を 10 円刻みで, 期間を 3 分割に近似した場合は, 図 1 のようなツリー構造をもったグラフを形成している. ここで, 従来のシナリオモデルと違うのは, 従来のモデルでは, 1 度シナリオが分岐すると, 2 度とそのシナリオは他のシナリオと結合することがないのに対し, 本モデルでは, 別の状態にあったシナリオが途中で結合することがあることである. 図 1の例で言えば, 2 期で 1010 円と 990 円の 2 つの状態から, 3 期の 1000 円の状態に行くことが可能になっている. このため, 各期の状態の数が指数的に増えることがない. なお, このようなことが可能になるためには, 資産価格が過去の履歴に依存しないという仮定が必要となる.

このような資産の状態が離散的に与えられ, その状態へ遷移する確率が与えられているときの, 各期のポートフォリオを解とする最適化問題を考える. ここでは, 簡単のため, 無危険資産と株式 1 つの 2 つの資産に配分する問題を考える. なお, 容易に多資産に拡張することが可能である.

まず, 図 1 のような状態のグラフを有向グラフ $G=(V,A)$ で表記する. ここで, Vは節点集合, A は枝集合を表す. このため, 各節点は株価の値, 各枝は株価の期間中の変動を表している. また, L を期末の節点の集合とする. 次に, p_i を節点 i での株価の値, w_{ji}, $(j,i) \in A$ をある期の節点 j において, 次の期で節点 i が生起する確率と表す. すなわち, $OUT(j) = \{i|(j,i) \in A\}$ と

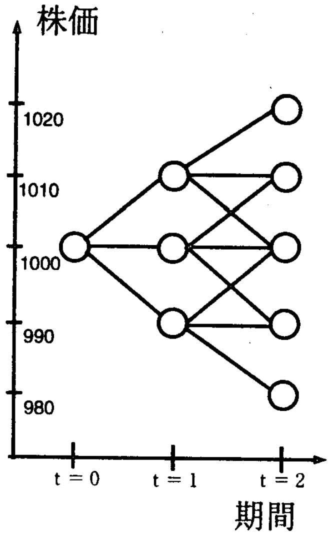

図 1: 株価の動き

すると, $\sum_{i \in OUT(j)} w_{ji} = 1$ かつ $w_{ji} \geq 0$ が成り立つ. このとき, $p_i - p_j$, $(j,i) \in A$ が株価の変動額となるまた, 初期資産を X_0, x_i,y_i を節点 i における株式および無危険資産への投資額, X_i を節点 i における総資産の期待値, γ_t を第 $t-1$ 期から 第 t 期での無危険資産の成長率 (1+収益率), $time(i)$ を節点 i の期間とする. さらに, $(x,y) = (x_0, \ldots, x_{|V-L|}, y_0, \ldots, y_{|V-L|})$ とする.

各節点において資産保存制約をみたす資産配分の集合を Sとする. つまり, $(x,y) \in S$は次の制約を満たしているとする. $i = 0$ のときは,

$$x_0 + y_0 = X_0,$$

であり, $0 < time(i) < T-1$ のときには,

$$\sum_{j \in IN(i)} w_{ji}(\frac{p_i}{p_j} x_j + \gamma_{time(i)} y_j) = x_i + y_i,$$

であり, 期末では,

$$\sum_{j \in IN(i)} w_{ji}(\frac{p_i}{p_j} x_j + \gamma_{time(i)} y_j) = X_i,$$

である. ただし, $IN(i) = \{j | (j,i) \in A\}$ とする. このようなモデルに対して, 期末の資産の期待値を最大化とする問題は以下のように定式化できる.

問題 1

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i \in L} X_i \\ \text{subject to} & x \in S \\ & (x,y) \geq 0 \end{array}$$

と定式化できる. ここで最後の制約は, 資産の空売りの禁止を表している.

次に, 上記のリスクの概念を考慮したモデルを考える. ここでは, リスクとしては, 一般によく使われている期末の資産の分散を用いることとする. その分散は次式で与えられる.

$$\sum_{i \in L} W_i(\bar{X}_i - \mu)^2$$

ここで,

$$\mu = \sum_{i \in L} \sum_{j \in IN(i)} w_{ji}(\frac{p_i}{p_j} x_j + \gamma_{time(i)} x_j)$$

であり,

$$\bar{X}_i = X_i / W_i$$

である. なお, W_i はグラフ G における節点 0 から節点 i への全てのパスの生起確率の和である. その分散で与えれらたリスクがある一定の値 α 以下に抑えることを制約に入れた問題として次の問題が考えられる.

問題 2

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i \in L} X_i \\ \text{subject to} & x \in S \\ & (x,y) \geq 0 \\ & \sum_{i \in L} W_i(\bar{X}_i - \mu)^2 \leq \alpha \end{array}$$

3 おわりに

本論文では, 多期間におけるポートフォリオを作成するモデルを提案した. この手法が実際に有効であるためことを示すために, 実際にシミュレーションしてみることは重要である. この実際のデータに対して, 本論文で提案した手法によってどのような投資効果が得られるかの計算結果は当日発表する.

参考文献

[1] Mulvey, J.M., and A. Ruszczynski, "A new scenario decomposition method for large-scale stochastic optimization", *Operations Research* Vol.43, No.3, (1995), pp.477-490.

[2] 竹原 均, ポートフォリオの最適化, 朝倉書店,1997.