1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

有効解集合上での最小化問題に対するパラメトリック解法

02004510 筑波大学 ＊石井 毅 ISHII Takeshi
筑波大学 久野 誉人 KUNO Takahito

1 はじめに

本稿では, 3 目的線形計画問題

$$
(\mathrm{TX})\left|\begin{array}{ll} \mathrm{Vmax} & \boldsymbol{z} = C\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \\ & \qquad A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}\} \end{array}\right.
$$

の有効解集合 X_E上で, 問題 (TX) の目的関数の 1 つを最小化する問題

$$
(\mathrm{P})\left|\begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^k\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X_E \end{array}\right.
$$

を取り扱う. ここに $A \in \boldsymbol{R}^{m\times n}(\mathrm{rank}\ A = m)$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m$, $C \in \boldsymbol{R}^{3\times n}$で, Cの行ベクトルを$\boldsymbol{c}^1$, $\boldsymbol{c}^2$, $\boldsymbol{c}^3$とする. 実行可能領域 Xは非空かつコンパクトであると仮定し, また Xのすべての端点は退化していないものとする. 一般に X_Eは非凸なので, 問題 (P) は, 複数の局所的最適解をもつ大域的最適化問題に分類される. このような問題を大域的に解くことは難しいが, Xの端点の中に, 問題 (P) の大域的最適解となる点が存在することが知られている.

2 m.e.e. point と i.e.e. point

任意のベクトル$\boldsymbol{\lambda}_i \in \boldsymbol{R}^3\backslash\{\mathbf{o}\}$ に対して, 問題 (TX) に対応する合成線形計画問題を考える:

$$
(\mathrm{P}(\boldsymbol{\lambda}_i))\left|\begin{array}{ll} \text{maximize} & z(\boldsymbol{\lambda}_i) = \boldsymbol{\lambda}_i^T C\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X \end{array}\right.
$$

Xはコンパクトなので, 目的関数の最適値は Xのある端点 (これを$\boldsymbol{x}^i$とする) で得られる. 特に, $\boldsymbol{\lambda}_i \in \boldsymbol{R}^3_+ = \{\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{R}^3 | \boldsymbol{\mu} > \mathbf{o}\}$ のときの問題 $(\mathrm{P}(\boldsymbol{\lambda}_i))$ の最適解は, 問題 (TX) の有効解であることが知られている.

非退化仮定により, $\boldsymbol{x}^i$に対する $[A, I]$($I \in \boldsymbol{R}^{m\times m}$ は単位行列) の基底 B_iが一意に決まり, この B_iに関して, $[A, I]$, $[C, O]$, $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}]$ をそれぞれ $[B_i, N_i]$, $[C_{B_i}, C_{N_i}]$, $[\boldsymbol{x}_{B_i}, \boldsymbol{x}_{N_i}]$ に分割する. ここに, $O \in \boldsymbol{R}^{3\times m}$ は零行列, $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{R}^m$はスラック変数ベクトルである. このとき $(\mathrm{P}(\boldsymbol{\lambda}_i))$ の最適辞書は次のように書ける:

$$
\left|\begin{array}{l} \boldsymbol{x}_{B_i} = B_i^{-1}\boldsymbol{b} - B_i^{-1}N_i\boldsymbol{x}_{N_i} \\ z(\boldsymbol{\lambda}_i) = \boldsymbol{\lambda}_i^T C_{B_i}B_i^{-1} + \boldsymbol{\lambda}_i^T\overline{C}_{N_i}\boldsymbol{x}_{N_i} \end{array}\right. \tag{1}
$$

ここに

$$
\overline{C}_{N_i} = C_{N_i} - C_{B_i}B_i^{-1}N_i
$$

である. $\boldsymbol{x}^i$は$\boldsymbol{\lambda}_i$が凸多面錐

$$
\Lambda(B_i) = \{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 | \boldsymbol{\lambda}^T\overline{C}_{N_i} \leq \mathbf{o}\} \tag{2}
$$

に属している限り問題($(\mathrm{P}(\boldsymbol{\lambda}_i))$ の最適解である. したがって,

$$
\Lambda(B_i) \cap \boldsymbol{R}^3_+ \neq \emptyset \tag{3}
$$

のときはかならず, $\boldsymbol{x}^i$は問題 (TX) 有効解である.

有効解である Xの端点$\boldsymbol{x}^i$とそれに対する基底 B_iについて, $\Lambda(B_i)$ が$\boldsymbol{R}^3_+$の部分集合であるか, そうでないかによって, $\boldsymbol{x}^i$を 2 種類に分類することができる:

定義 2.1 Xの端点$\boldsymbol{x}^i$とそれに対する基底 B_iについて,

$$
\Lambda(B_i) \subset \boldsymbol{R}^3_+ \tag{4}
$$

を満たすとき,$\boldsymbol{x}^i$を *i.e.e.(internally efficient extreme) point* という.

定義 2.2 Xの端点$\boldsymbol{x}^i$とそれに対する基底 B_iについて,

$$
\Lambda(B_i) \not\subset \boldsymbol{R}^3_+ \text{ かつ } \Lambda(B_i) \cap \boldsymbol{R}^3_+ \neq \emptyset \tag{5}
$$

を満たすとき, $\boldsymbol{x}^i$は *m.e.e.(marginally efficient extreme) point* という.

上の 2 つの概念を導入することにより, 次の結果が示される.

定理 2.1 Xの *m.e.e.points* の中に問題 (P) の大域的最適解が存在する.

3 問題 (P) に対する解法

2次元単体

$$\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 | \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{o}\}$$

を考える．すべての$\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}_+^3$を正規化することにより

$$\Lambda_+ = \{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}^3 | \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{o}\}$$

を作ることができるが，これはΛの相対内部にあたる．有効解であるXの端点は，適当な$\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_+$に対する問題 $(\mathrm{P}(\boldsymbol{\lambda}))$ の最適解として得られる．しかし，定理 2.1 は，Λの相対境界$\Lambda \backslash \Lambda_+$ に沿った，Λ_+の一部分だけを探索することで，問題 (P) の大域的最適解を求めることができることを示唆している．

$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\lambda})$ を $(\mathrm{P}(\boldsymbol{\lambda}))$ の最適解，$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\lambda}^*)$ を問題 (P) の最適解とする．ここに$\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathrm{rel}\ \Lambda$である．上述の考察から，$\boldsymbol{\lambda}^*$を求めるためには，$\Lambda$の 3 本の稜線に沿った$\Lambda$の "ほんのちょっと" 内側をたどればよい．つまり，十分小さな$\epsilon > 0$ に対して，$\boldsymbol{\lambda}$の各成分の値を連続的に

Stage I. $(1-2\epsilon, \epsilon, \epsilon)$ から $(\epsilon, 1-2\epsilon, \epsilon)$ へ

Stage II. $(\epsilon, 1-2\epsilon, \epsilon)$ から $(\epsilon, \epsilon, 1-2\epsilon)$ へ

Stage III. $(\epsilon, \epsilon, 1-2\epsilon)$ から $(1-2\epsilon, \epsilon, \epsilon)$ へ

と変化させることによって $(\mathrm{P}(\boldsymbol{\lambda}))$ を解き，m.e.e. point $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\lambda})$ にでくわすたびに$\boldsymbol{c}^i\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{\lambda})$ を評価する．したがって，これら 3 つの Stage はいずれも，1 つのパラメータを含む目的関数をもつ線形計画問題をパラメトリック単体法によって解くことができる．例えば Stage I では，問題
$(\mathrm{P_I}(\lambda; \epsilon))$

$$\left| \begin{array}{ll} \text{maximize} & z(\lambda;\epsilon) = [(1-\epsilon-\lambda)\boldsymbol{c}^1 + \lambda\boldsymbol{c}^2 + \epsilon\boldsymbol{c}^3]\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X \end{array} \right.$$

を，λの値をϵから $1-2\epsilon$まで連続的に増加させながら解いていく．ここに$\epsilon > 0$ は十分小さい数であるが，この値はあらかじめ固定値に定めておく必要はない．

Stage2, Stage 3 では，$(\mathrm{P_I}(\lambda;\epsilon))$ の$\boldsymbol{c}^1$, $\boldsymbol{c}^2$, $\boldsymbol{c}^3$の役割を入れ換えて，Stage I と同様の手続きを行う．3 つの Stage すべてを実行する間にでくわす m.e.e.points の中で，問題 (P) の目的関数$\boldsymbol{c}^k\boldsymbol{x}$の最小値を与える点が問題 (P) の大域的最適解である．

4 おわりに

本稿では，3 目的線形計画問題 (TX) の有効解集合上で，(TX) の目的関数の 1 つを最小化する問題 (P) を解くためのパラメトリック単体法をを提案した．アルゴリズムの詳細および計算機実験の結果と考察は，発表当日に示す．

参考文献

[1] Benson, H.P. : "Optimization over the Efficient Set", *Journal of Mathematical Analysis and Application* 98, 581-598, 1984.

[2] Benson, H.P. : "Optimization over the Efficient Set: Four Special Case", *Jouenal of Optimization Theory and Applications* 80, 3-18, 1994.

[3] Horst, R., and Tuy, H. : "Global Optimization: Deterministic Approaches", 2nd Edition, Springer Verlag, Berlin, Germany, 1993.

[4] Isermann, H., and Steuer. R.E. : "Computational experience concerning payoff tables and minimum criteion values over the efficient set" *Europian Journal of Operational Research* 33, 91-97, 1987.

[5] 今野　浩：「線形計画法」，日科技連，1987.

[6] Steuer, R.E. : "Multiple Criteria Optimization : Theory, Computation and Application", John Wiley & Sons, Inc., 1986.