舞台照明問題の NP 完全性

伊藤大雄 ITO Hiro (01009550) *, 上原秀幸 UEHARA Hideyuki, 横山光雄 YOKOYAMA Mitsuo
豊橋技術科学大学情報工学系

1　はじめに

照明問題とは、与えられた照明器具で室内等の決められた領域を照らすのに、必要な照明数やその配置などを問う問題である。照明問題の一つ 1992 年に Urrutia が提示した舞台照明問題 (stage illumination problem)[2] があるが、本問題が多項式時間で解けるか NP 困難であるかは未解決問題であった。本稿では舞台照明問題が NP 完全であることを証明する。

2　準備

簡単の為に平面上の x 軸上の線分 $[(a,0),\ (b,0)]$ は $[a,b]$ とも表すことにする。

舞台照明問題（図 1）とは以下の様な問題である。平面上の x 軸上に与えられた線分 $[a_L, a_R]$ を**舞台**と考える。x 軸で区切られる片側半平面上に n 個の投光器が与えられる。各**投光器** i はその根元を座標 (x_i, y_i) に固定されているが、根元を軸として自由に回転することができ、幅α_iの角度を距離に関係無く照らすことができるものとする。

舞台照明問題 (Stage illumination problem)[2]
入力: 実数 a_L, a_R, x_1, x_2, $\cdots$, x_n, y_1, y_2, $\cdots$, y_n, α_1, α_2, $\cdots$, α_n, 但し y_1, y_2, $\cdots$, $y_n > 0$ and $\pi > \alpha_1$, α_2, $\cdots$, $\alpha_n > 0$.
質問: 投光器 $(x_i, y_i; \alpha_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ の方向を調節することによって、舞台 $[a_L,\ a_R]$ を全て照らすことが可能か？

投光器 i で照らされる x 軸上の区間を $[\ell_i,\ r_i]$ で表す。舞台照明問題の解に対し、各投光器 i を ℓ_iの非減少順に並べ、$\langle i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_n\rangle$ のように表現する。ここで関数$\sigma(k) = i_k$を考えると、 σは $\langle 1, 2, \cdots, n\rangle$ に対する置換になる。

*441-8580 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1–1, Tel/Fax: 0532-44-6743, E-mail: ito@tutics.tut.ac.jp

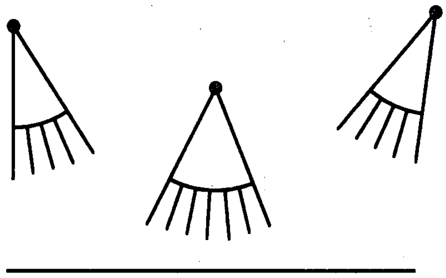

図 1: 舞台照明問題

補題 1 舞台照明問題の問題例の実行可能解に対応する置換をσとする。このとき $\ell_{\sigma(1)} = a_L$, $\ell_{\sigma(i)} = r_{\sigma(i-1)}$, for $i = 2, 3, \cdots, n$ を満たす解も実行可能解になる。□（証明略）

補題 1の条件を満足する解を**正規**な解と呼ぶことにする。正規な解は各 $[\ell_i,\ r_i]$ が重ならない。各置換σに対し、正規な解は唯一存在する。補題 1より、正規な解のみを調べれば良いことになる。よって以下の性質を得る。

補題 2 舞台照明問題は NP に属する。□（証明略）

3　NP 完全性の証明

舞台照明問題の NP 困難性は既知の NP 完全問題である分割問題 [1] を帰着することで証明する。

分割問題 (PARTITION)
入力: 自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$.
質問: $\sum_{i \in A} a_i = \sum_{i \in N-A} a_i$を満たす $A \subset N = \{1, 2, \cdots, n\}$ は存在するか？

定理 1 舞台照明問題は、投光器の根元を固定する点が 2 箇所に限定されていても NP 完全である。□

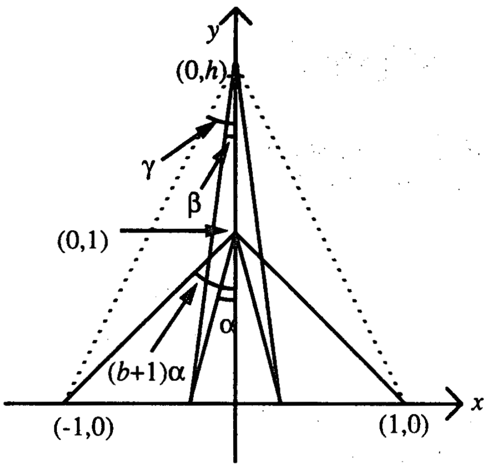

図 2: 分割問題より帰着された舞台照明問題の問題例

証明: $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ を分割問題の問題例とする。舞台照明問題の問題例を以下の手順で作成する。(図2参照)

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i, \\
\alpha &= \frac{\pi}{4(b+1)}, \\
h &= \sqrt{\frac{(2-\tan 2\alpha)\tan\alpha}{\tan 2\alpha - 2\tan\alpha}}, \\
\beta &= \tan^{-1}(\frac{\tan\alpha}{h}).
\end{aligned}
$$

$n+1$ 個の投光器を、$i=1,2,\cdots,n$ に対し $(x_i,y_i)=(0,1)$, $\alpha_i = a_i\alpha$、と $(x_{n+1},y_{n+1})=(0,h)$, $\alpha_{n+1}=2\beta$の様に定め、さらに舞台を $[-1,1]$ とする。

これらの変数のうちで、h の値の意味を簡単に説明しておくと、h は十分大きく（つまりここで示した数値以上に）とれば良いのである。そうすることで、投光器 $n+1$ は舞台のどこを照らしても照射範囲はあまり変わらない様になり、それに対して他の投光器は舞台の中央部分を照らすと照射範囲が狭くなり、損をする様に出来ている。その結果、実行可能解が存在するならば、投光器 $n+1$ が舞台中央を照らすしか無いことになる。以下でそれを示す。

(I) 分割問題の問題例が実行可能と仮定する。実行可能解を $A=\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_p\}\subset N=\{1,2,\cdots,n\}$ とし、$N-A=\{i_{p+1},\ i_{p+2},\ \cdots,\ i_n\}$ とおく。舞台照明問題の正規解$\sigma\langle 1,\ 2,\ \cdots,\ n+1\rangle = \langle i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_p,\ n+1,\ i_{p+1},\ i_{p+2},\ \cdots,\ i_n\rangle$ を考えると、投光器集合 $\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_p\}$、$\{n+1\}$、$\{i_{p+1},\ i_{p+2},\ \cdots,\ i_n\}$ はそれぞれ $[-1,\ -\tan\alpha]$、$[-\tan\alpha,\ \tan\alpha]$、$[\tan\alpha,\ 1]$ を照らすので舞台全てが照らされ、舞台照明問題の問題例が実行可能となる。

(II) 舞台照明問題の問題例が実行可能と仮定する。その実行可能解に対応する置換を$\sigma\langle 1,\ 2,\ \cdots,\ n+1\rangle = \langle i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_p,\ n+1,\ i_{p+1},\ i_{p+2},\ \cdots,\ i_n\rangle$ とする。このとき、$L=\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_p\}$、$R=\{i_{p+1},\ i_{p+2},\ \cdots,\ i_n\}$ と置く（L と R は空でも良い）。L (resp., R) は投光器 $n+1$ の左 (resp., 右) を照らす投光器の集合である。$b_L=\sum_{i\in L}a_i$, $b_R=\sum_{i\in R}a_i$とする。明らかに $b_L+b_R=2b$ である。

もし $b_L=b_R=b$ であるならば分割問題の問題例は実行可能となる。よって、一般性を失うことなく、$b_L\le b-1$ の場合を考えれば十分である。投光器 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ によって照らされなかった部分の長さの合計を d とすると、$b_L\le b-1$ より、$d\ge\tan 2\alpha$となる。次に投光器 $n+1$ で照射される部分の長さを c とおくと、c の上限は舞台の端を照らした場合であることから、$c\le 1-h\tan(\gamma-2\beta)<2\{1-h\tan(\gamma-\beta)\}$ となる（但し$\gamma=\tan^{-1}\frac{1}{h}$とする)。以上から計算することによって

$$d>c$$

が得られる（詳細は略)。よって照らされ無い部分が舞台上に存在することになり、実行可能解であることと矛盾する。よって $b_L=b_R=b$ でなければならない。 Q.E.D.

参考文献

[1] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: a Guide to the Theory NP-Completeness*, Freeman, 1979.

[2] J. Urrutia, Art gallery and illumination problems, *Proceedings of Discrete and Computational Geometry Workshop'97*, Tokai University, pp. 1–57, 1997.