線形計画法の直線座標表示

01700130　慶應義塾大学　柳井　浩

1 はじめに　線形計画法の図解といえば，図1のような直交座標平面上のものが大部分であるが，ここでは，直線座標系を用いた図解を試みる．

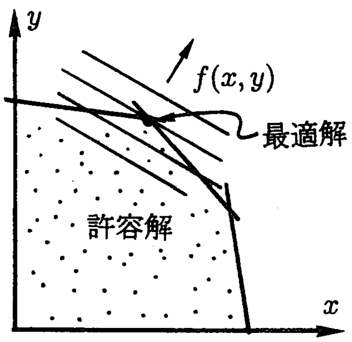

図　1

2 直線座標系　図2のように，uをヨコ軸，vをタテ軸とする直交座標平面上，それぞれ，$u=0, v=0$および$u=1, v=0$を通るタテ軸に平行な2本の直線を引き，これらを，$y-$軸および$x-$軸とする．実数の対(x,y)に対して，$x-$軸上の点xおよび$y-$軸上の点yを結ぶ直線を対応させるのが**直線座標系**である．

直交座標系で，点$(u,0)$を通るタテ軸に平行な直線を**平行軸**と呼ぼう．この平行軸と，"直線(x,y)"との交点のタテ座標vは

$$v = ux + (1-u)y \tag{1}$$

である．

ところで，一次式

$$\varphi(x,y) = ax + by \quad (a+b \neq 0) \tag{2}$$

は

$$\varphi(x,y) = (a+b)\left[\frac{a}{a+b}x + \left(1-\frac{a}{a+b}\right)y\right] \tag{3}$$

と書きかえられるから，この式の[ ]内の値は，図2で計算できる．すなわち，"直線(x,y)"と平行軸との交点の高さがこの値である．さらに，平行軸上の単位長さを$a+b$と目盛れば，$\varphi(x,y)$の値が直接読みとれる．以下では平行軸をこのように目盛っておくことにしよう．

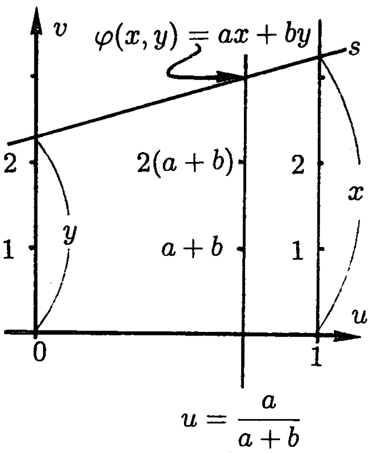

図　2

3 一次不等式　一次不等式

$$g(x,y) = ax + by \le c \tag{4}$$

は$u-$軸上$\frac{a}{a+b}$に立てた平行軸上の目盛りがcより大きい所で，"直線(x,y)"がこれと交わらないことを要求している．平行軸のこの部分をgの**制約半直線**と呼ぶ．もっとも，制約半直線は$a+b$の符号によって，上向きにも，下向きにもなるので，それに応じて**上側制約半直線**，**下側**制約半直線などと呼ぶことにしよう．また，制約半直線の始点を**境界点**と呼ぶことにする．"直線(x,y)"が不等式をみたしているとき，この直線と平行軸の交点と境界点の目盛りの差が，解(x,y)のこの不等式に関する余裕を示し，線形計画法における**スラック変数**の値に対応する．

連立一次不等式の場合には，複数本の上側－および下側半直線が現れ，そのどれをも横切らない"直線"が許容解に対応する．それゆえ，これを**許容直線**と呼ぶことにしよう．さらに，上(下)側制約半直線の凸包を**上(下)側制約凸包**と呼ぶことにすれば，上側および下側の制約凸包が重ならず，その間に隙間－－これを**許容帯**という－－があれば，連立一次不等式が解をもつこと

になる．

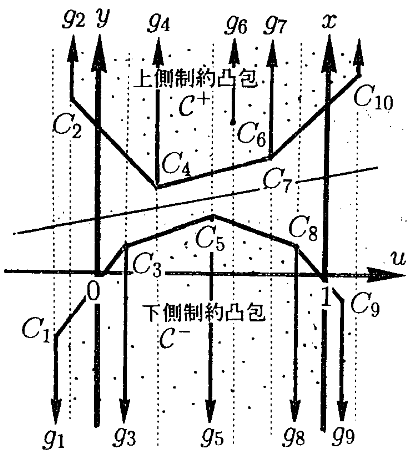

図　3

3 シンプレックス法　線形計画法問題

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = px + qy &= max! \quad (p+q>0) && (5)\\
s.t.\quad g_1(x,y) &= a_1x + b_1y \le c_1 && (6)\\
g_2(x,y) &= a_2x + b_2y \le c_2 && (7)\\
g_3(x,y) &= a_3x + b_3y \le c_3 && (8)\\
x \ge 0,&\quad y \ge 0 && (9)
\end{aligned}
$$

をシンプレックス法で解くことを考える．一般性を失うことなく，

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 > 0 \qquad (10)$$

を仮定する．さらに，

$$c_1 > 0,\ \ c_2 > 0,\ \ c_3 > 0 \qquad (11)$$

ならば，許容解が存在する．また，$u = \frac{p}{p+q}$ に平行軸を引き，単位長さを $p+q$ で目盛って，これを $f-$ 軸とすれば，これから目的関数の値が直接読みとれる．このような状況を示したのが図4である．線形計画の問題は，許容直線 (x,y) のうちで $f-$ 軸との交点の目盛りの読みが最も大きくなるものを求めることである．

シンプレックス法は，この図でいえば，許容直線 $\ell_0(x=y=0)$ から始めて，これを制約凸包の頂点を支点にしてせり上げて行くプロセスである．ある制約半直線にそって許容直線をひと目盛りせり上げたら，$f-$ 軸の目盛りがどれだけ増加するのか？その値がいわゆる**リデュースド・コスト**に対応する．これを比較して大きいものを選んで許容直線を制約凸包にぶつかるまでせり上げる．これが掃き出し演算によるシンプレックス法の一段階である．こうして，改良が可能な限り許容直線をせり上げて最適“解直線”に到達してプロセスが完結する．

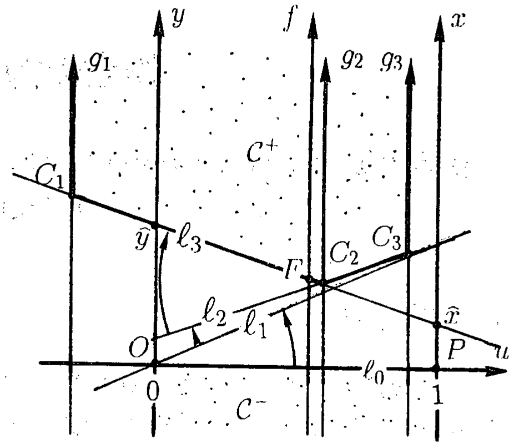

図　4

さて，最適解直線がえられ，これが制約半直線 g_1 および g_2 の上の境界点 C_1 および C_1 を通るものとしよう．(図5参照) このとき，g_1 に関する制約条件が緩んで，c_1 が c_1+1 に増えれば，境界点 C_1 が一目盛り上方の C_1' に移動し，最適“解直線”も C_2 を支点として C_1' までせり上げられるようになり，最適解直線と $f-$ 軸の交点も上方に移動する．そして，その移動分を $f-$ 軸上の目盛りで読んだ値が g_1 の条件に関する**シャドウ・プライス**に対応する．

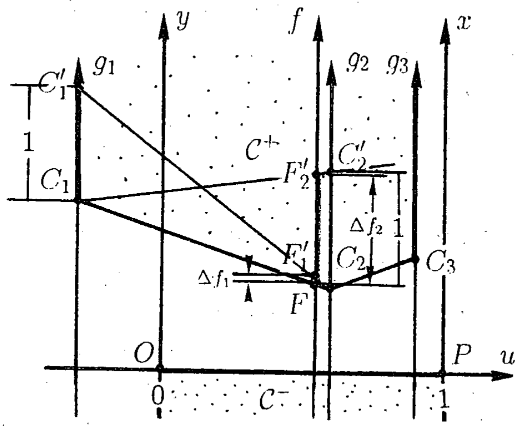

図　5

この他，パラメトリック―，多目的―，半無限線形計画，双対定理，合意形成問題等にもこの図解法を用いれば，独特の説明が可能になるが，それらについては下の文献[1]を参照して欲しい．

[1] 柳井　浩「線形計画問題の直線座標表示」
Technical Report No.98001, (10.V.1998)
Department of Administration Engineering,
Keio University