1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

# パターン数最小化を目的とするカッティングストック問題について

02004704　京都大学　*梅谷 俊治　UMETANI Shunji
01704164　京都大学　柳浦 睦憲　YAGIURA Mutsunori
01001374　京都大学　茨木 俊秀　IBARAKI Toshihide

## 1 まえがき

カッティングストック問題[1]とは，一定サイズの母材料(ストック)から様々なサイズの製品をそれぞれの需要に応じて切出す問題であり，切出しにかかる総費用の最小化を目的とする．１つのストックから切出す製品の組合わせをカッティングパターンと呼ぶ．従来のカッティングストック問題では，使用ストック本数の最小化が主に取り上げられてきたが，この背景として，ストック製造費が費用の大半を占めていた事があげられる．しかし，近年の人件費の上昇に伴い，パターンの切替に要する手間の削減が求められている．そこで，本研究では，パターン数の最小化を目的とする１次元のカッティングストック問題を取り上げる．提案するアルゴリズムでは，使用パターン数を固定した上で，需要に対する過不足ができるだけ少なくなるようなパターンの組合せをメタ戦略を用いて探索する．

## 2 問題の定式化

ストックの長さを$L$とする．切り出す製品の種類を$m$，各製品の切り出し長を$l_1, l_2, \ldots, l_m$，各製品の需要数を$d_1, d_2, \ldots, d_m$とする．本研究では，利用可能なパターンはあらかじめ与えられているものとする．利用可能なパターン数を$n$とし，$\mathbf{V} = \{1, 2, \ldots, n\}$とおく．パターン$j$ $(\in \mathbf{V})$で切出される製品$i$の数を$a_{ij}$ $(\in \mathbf{Z}^+)$ ($\mathbf{Z}^+$は非負整数の集合)とし，パターン$j$をベクトル$(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$で表す．各パターン$j$に対し，

$$\sum_{i=1}^{m} l_i a_{ij} \leq L \qquad (1)$$

が成り立つ．

使用するパターンの集合を$\mathbf{S}$ $(\subseteq \mathbf{V})$，パターン$j$を適用する回数を$x_j$とすると，パターン数最小化を目的とするカッティングストック問題は，以下の様に定式化できる．

$$\begin{aligned} \min \quad & |\mathbf{S}| \\ \text{s.t.} \quad & |\sum_{j \in \mathbf{V}} a_{ij} x_j - d_i| \leq D,\ i = 1, \ldots, m \\ & x_j \in \mathbf{Z}^+,\ j \in \mathbf{S} \\ & x_j = 0,\ j \in \mathbf{V} \backslash \mathbf{S} \end{aligned}$$

$D$は需要の過不足に対する許容範囲を表す．

## 3 アルゴリズム

提案するアルゴリズムでは，使用パターン数$|\mathbf{S}|$を$N$に固定した上で，需要の過不足の２乗和が最小となるような使用パターンの組$\mathbf{S}$を多スタート局所探索法を用いて探索する．使用パターンの組$\mathbf{S}$に対する各パターンの適用回数は，以下の２次計画問題$QP_s$の実数最適解$\tilde{x}_s$を整数に丸めたものを与える．こうして得られた整数解を$\bar{x}_s$とする．２次計画問題$QP_s$の解法，および整数解の求め方については後述する．

<u>$QP_s$</u>

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - d_i \right)^2 \\ s.t. \quad & x_j \geq 0,\ j \in \mathbf{S} \\ & x_j = 0,\ j \in \mathbf{V} \backslash \mathbf{S} \end{aligned}$$

近傍$NB(\mathbf{S})$は，

$$NB(\mathbf{S}) = \{\mathbf{S} \cup \{i\} \backslash \{j\} | i \in \mathbf{V} \backslash \mathbf{S}, j \in \mathbf{S}\}$$

と定義する．これは，$\mathbf{S}$に含まれていないパターンと含まれているパターンを入れ替えることによって得られるパターンの集合である．**Step 1**で与える初期使用パターンの組合せの数を$MAXTRIALS$とする．アルゴリズムを以下に示す．

<u>多スタート局所探索法</u>

**Step 0** $best \leftarrow \infty$, $trials \leftarrow 0$とする．

**Step 1** $|\mathbf{S}| = N$となる$\mathbf{S} \subseteq \mathbf{V}$をランダムに選択する．

**Step 2** $f(\bar{x}_s) < best$ならば$best \leftarrow f(\bar{x}_s)$，$x^* \leftarrow \bar{x}_s$とする．

**Step 3** 近傍$NB(\mathbf{S})$ を適当な順序で探索し，$f(\bar{x}'_s) < f(\bar{x}_s)$ となる $\mathbf{S}' \in NB(\mathbf{S})$ が見つかれば $\mathbf{S} \leftarrow \mathbf{S}'$として **Step 2** へ戻る．そのような $\mathbf{S}'$がなければ **Step 4** へ行く．

**Step 4** $trials < MAXTRIALS$ならば$traials \leftarrow trials + 1$ として **Step 1** へ戻る．そうでなければ $x^*$を出力して終了する．

2次計画問題 $QP_s$は制約条件が少ないため，実装の比較的容易なガウス・ザイデル法[2] を用いて，実数最適解$\tilde{x}_s$を求めた．実数解$\tilde{x}_s$から整数解$\bar{x}_s$を求める方法としては四捨五入，確率丸め，最適丸めの3手法を試みた．確率丸めは乱数 $r \in [0,1)$ を生成し，$r < \tilde{x}_s - \lfloor \tilde{x}_s \rfloor$ ならば$\bar{x}_s \leftarrow \lceil \tilde{x}_s \rceil$ とし，そうでなければ$\bar{x}_s \leftarrow \lfloor \tilde{x}_s \rfloor$ とする方法，最適丸めは丸めの全ての組合せを列挙し，最良解を$\bar{x}_s$とする方法である．5節の実験で用いた問題例では，使用パターン数$N$が小さいため，最適丸めを用いた．

提案するアルゴリズムでは，さらに以下の工夫を加えて高速化を計っている．まず，$LB(\mathbf{S}) = \sum_{\{i|a_{ij}=0\ ,\ \forall j \in \mathbf{S}\}} d_i^2$と定義すると，$LB(\mathbf{S}) \leq f(\bar{x}_s)$が成り立つ．$LB(\mathbf{S})$ は2次計画問題 $QP_s$を解くのに比べ高速に計算できる．$LB(\mathbf{S}') \geq f(\bar{x}_s)$ ならば $f(\bar{x}'_s) \geq f(\bar{x}_s)$ が成り立つので，2次計画問題 $QP_s$ を解かずに次の近傍解の探索を行う．

また，任意の $\mathbf{S}$ に対し $f(\bar{x}_s) \geq f(\tilde{x}_s)$ が成り立つので，$f(\tilde{x}'_s) \geq f(\bar{x}_s)$ ならば$\bar{x}'_s$を求めずに次の近傍解の探索を行う．

## 4 計算実験

実験は，Sun Ultra 2 Model 2300 上でC言語を用いて行った．問題例は，化学繊維産業における実例に近いものを Gau と Wäscher によるプログラム CUTGEN1[3] を用いて作成した．表1に実験で用いた問題例を示す．

表1：カッティングストック問題例

| ストック長：2400 | | |
|---|---|---|
| 番号 | 製品長 | オーダ数 |
| 1 | 501 | 120 |
| 2 | 475 | 111 |
| 3 | 438 | 62 |
| 4 | 420 | 106 |
| 5 | 389 | 72 |
| 6 | 368 | 11 |
| 7 | 360 | 82 |
| 8 | 352 | 141 |
| 9 | 347 | 111 |
| 10 | 312 | 134 |

利用可能なパターンとして，化学繊維産業の実例を参考に，式(1) に加えて (i) ストックの切り残しの長さは40以下，(ii) パターンに含む製品数は5個以上7個以下，の2条件を満たすパターンを列挙した．(i) はストックの切り残しが生産コストに計上される，(ii) は製品の切出しを行う機械のカッター数の制限があるという理由により導入した．表1の問題例では，上記の制約を満たすパターンが564通り生成される．需要の過不足の許容範囲は $D = 2$ とした．

表1の問題例に対して，使用パターン数を $N = 1 \sim 8$ と変え，各$N$について1000組の異なる初期使用パターンを用いてアルゴリズムを適用した．このとき，需要の過不足の合計の1000回試行における最小値と需要の過不足が±2以内となる解(即ち，実行可能解) が得られた回数を表2に示す．

表2：使用パターン数$N$に対する需要の過不足

| $N$ | 需要の過不足 | 実行可能解の数 |
|---|---|---|
| 1 | 362 | 0 |
| 2 | 138 | 0 |
| 3 | 46 | 0 |
| 4 | 12 | 0 |
| 5 | 4 | 90 |
| 6 | 1 | 513 |
| 7 | 1 | 959 |
| 8 | 0 | 1000 |

表2より分かるように，提案するアルゴリズムでは製品数の半分のカッティングパターンのみを用いて需要の過不足が±2以内となる解が得られる．全計算時間は $N = 5$ で8分46秒，$N = 6$ で16分31秒であり，実行可能解1個あたりの計算時間は $N = 5$ で5.84秒，$N = 6$ で1.93秒となる．

## 5 まとめ

本研究では，パターン数最小化を目的とするカッティングストック問題を対象とするアルゴリズムを提案し，化学繊維産業における応用例をもとに計算機実験を行った．計算機実験では少ないパターン数の解を短時間で探索でき，十分な実用性がある事を確かめた．

## 参考文献


[1] C. H. Cheng, B. R. Feiring, "The cutting stock problem – A survey," *Int. J. Production Economics*, Vol. 36, pp. 291 – 305, 1994.

[2] D. P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*, Athna Scientific, 1995.

[3] T. Gau and G. Wäscher, "CUTGEN1: A problem generator for the Standard One-dimentional Cutting Stock Problem," *European Journal of Operational Reaseach*, Vol. 84, pp. 572 – 579, 1995.