1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

待ち行列への最適参入時期問題
— ジョブ数が確率的な場合 —

01107945 *小柳 淳二 (KOYANAGI Junji) 鳥取大学工学部
01103205 河合 一 (KAWAI Hajime) 鳥取大学工学部

1 はじめに

ある作業を行うため待ち行列に並ばなければいけない場合に, 他にも作業を抱えている人は, 他の作業を行いながら行列の様子を観測し, 行列が短くなったときに行列に加わるという行動を取る場合がある. このような問題に対し, 待ち行列に加わらずにできる作業数が, あらかじめわかっている場合について [1] で議論したが, 今回はその作業数が確率分布に従っている場合をとりあげる.

プログラムの作成など, いつ終了するかはっきりとわからないような仕事をしつつ, 共同で使用している機械で他の仕事をすませるような場合が, 本研究の例として考えられる.

2 モデル

1 個の作業 A と, ある確率分布に従う個数の作業 B をまかされている作業者がいるとする.

作業 A を行うためには他の作業者と共同で利用している共有設備を使うことが必要であり, それが他の作業者によって使用されているとき, 行列に並んで順番を待つことができるが, 並んでいる間に作業 B を行うことはできないものとする. 共有設備で 1 個の仕事を処理する時間は, 平均処理時間 μ^{-1} の指数分布に従い, それを使用する人の到着率は行列長が i の時 λ_i とする.

作業 B は作業者専用の場所が存在し, 任意の時間に処理を行うことができ, 作業 1 つを処理する時間は一般分布 $G(x)$ (平均 γ^{-1}) に従うものとする. 作業 B の個数は確率分布に従っており B_k でその個数が k 個以上である確率を示すものとする.

作業者は作業 B を一つ処理するごとまだ作業が残っているかどうかを知ることができる. もし, 作業 B がまだ残っている場合には, 共有設備の待ち行列長を観測し, 作業 A のため行列に加わるか, 作業 B の方を行うかを決定する. 行列に加わると作業 A が終了するまで行列に滞在し, その後, 作業 B にもどり, それが終了するまで, 作業を続ける. ここでは, 2 種類の作業を終えるまでの総期待処理時間を最小にするように, 共有設備に並ぶことを考える.

3 定式化

作業 A を行う待ち行列長が i で, 作業 B を k 個終了させ, まだ, 作業 B があると判明した状態を (i,k) で表す. 関数 $V(i,k)$ を最適総期待処理時間とすると, 次の最適性方程式を満たす.

$$W(i,k) = \int_0^\infty \Big[x + \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(x)\Big(S_{k+1}(j+1)/\mu + \overline{S}_{k+1}V(j,k+1)\Big)\Big]dG(x) \quad (1)$$

$$V(i,k) = \min\{M_k + (i+1)/\mu, W(i,k)\} \quad (2)$$

ここで,

- S_k は, 作業 B の数が k 以上という条件の下で, k 個で作業 B が終了する確率
  $S_k = (B_k - B_{k+1})/B_k$, $\overline{S}_k = 1 - S_k$.
- M_k は, 作業 B が k 個終了し, 作業 B がまだ残っているときの, 期待残存時間
  $M_k = \sum_{m=k+1}^{\infty} \gamma^{-1} B_m / B_{k+1}$.
- $P_{ij}(x)$ は行列長が i から x 時間後に j に変化する確率

とする. ここで, 以下を仮定する.

仮定 1 λ_i は i に関して減少.

この仮定は待ち行列が長くなるほど到着する客が減少する, ということを示している.

この仮定から次のような推移確率の性質が導かれる.

補題 1 任意の i, j, x に対して

1. $\sum_{j=k}^{\infty}\big[P_{i+1j}(x) - P_{ij}(x)\big] \geq 0$,
2. $Q_{i+1}(x) - Q_i(x) \leq 1$. ここで,

$$Q_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} j P_{ij}(x)$$

最初の性質は出生死滅過程であることから成立し, 2 番目の性質は, 仮定から成立する

4 最適値関数の性質

以下の逐次近似法により, 帰納法を用いて $V(i,k)$ の性質を証明する.

$$V^0(i,k) \equiv 0$$

$$W^{n+1}(i,k) = \int_0^\infty \Big[x + \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(x)\Big(S_{k+1}(j+1)/\mu + \overline{S}_{k+1}V^n(j,k+1)\Big)\Big]dG(x)$$

$$V_{n+1}(i,k) = \min\{M_k + (i+1)/\mu, W^n(i,k)\}$$

補題 2 $V(i,k)$ は次の性質を満たす.

1. S_k が k に関して増加なら,

$$V^n(i,k+1) - V^n(i,k) \geq M_{k+1} - M_k \quad (3)$$

$$W^n(i,k+1) - W^n(i,k) \geq M_{k+1} - M_k \quad (4)$$

2. S_k が k に関して減少なら,

$$V^n(i,k+1) - V^n(i,k) \leq M_{k+1} - M_k \quad (5)$$

$$W^n(i,k+1) - W^n(i,k) \leq M_{k+1} - M_k \quad (6)$$

証明の一部.
S_k が k に関して増加の場合を以下に示す.

$$W^{n+1}(i,k+1) - W^{n+1}(i,k)$$

$$\geq \int_0^\infty \Big[\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(x)\Big((S_{k+2} - S_{k+1})(j+1)/\mu + \overline{S}_{k+2}(V^n(j,k+1) + M_{k+2} - M_{k+1}) - \overline{S}_{k+1}V^n(j,k+1)\Big)\Big]dG(x)$$

(帰納法の仮定)

$$\geq \int_0^\infty \Big[\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(x)\Big((S_{k+2} - S_{k+1})(-M_{k+1}) + \overline{S}_{k+2}(M_{k+2} - M_{k+1})\Big)\Big]dG(x)$$

$(S_{k+2} - S_{k+1} \geq 0)$ より

$$= M_{k+1} - M_k$$

また, 次の補題も証明できる.

補題 3 $V^n(i,k)$, $W^n(i,k)$ は次の性質を満たす.

$$V^n(i+1,k) - V^n(i,k) \leq 1/\mu \quad (7)$$

$$W^n(i+1,k) - W^n(i,k) \leq 1/\mu \quad (8)$$

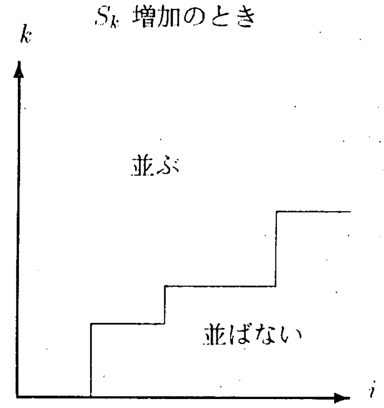
これらの補題から次の定理を得る.

定理 1 $i,k,n,m \geq 1$ に対して最適政策は以下の性質を持つ.

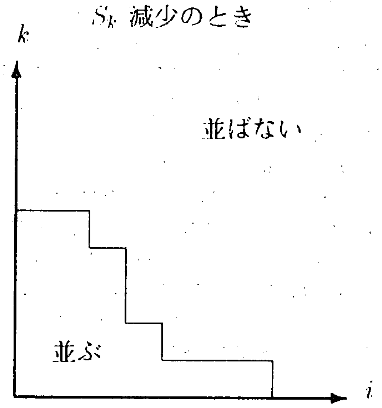
- S_k が k に関して増加関数のとき, ある (i,k) で行列に加わるのが最適ならば (m,n), (ただし $(m \leq i, n \geq k)$) でも加わることが最適である.
- S_k が k に関して減少関数のとき, ある (i,k) で行列に加わるのが最適ならば (m,n), (ただし $(m \leq i, n \leq k)$) でも加わることが最適である.

図示すると以下のようになる.

S_k 増加のとき



S_k 減少のとき



参考文献

[1] 1998 年度日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集 pp. 180–181