1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

小売業における特別展示商品に対する経済的発注量

02103234　神戸商科大学大学院　＊川勝 英史　KAWAKATSU Hidefumi
01204194　流通科学大学情報学部　三道 弘明　SANDOH Hiroaki
01503164　神戸商科大学商経学部　濱田 年男　HAMADA Toshio

1. はじめに

これまでに在庫管理に関するモデルが多数開発されている[1]が，小売業の現場ではこれらのモデルがほとんど利用されていない．この理由として，(1)「小売業の現場が理論を理解できていない」ということが考えられるが，(2)「理論が実体に合っていない」という側面も否定できない．(1)については，現場の担当者と研究者の双方の歩み寄りによって解決できると考えられる．(2)の原因としては様々なことが挙げられるが，本研究では，「商品によっては，展示されている商品が多いほど売れるものがある」という点について注目する．例えば特価商品や特別展示商品などはその代表例である．本研究では，このような特性を持つ商品を対象とした経済的発注量を提案する．

2. モデル

本研究では以下の場合を考える．

(1) 商品の需要は確定的であるが，在庫量が多い程良く売れ，在庫量が少なくなるとあまり売れなくなる．

(2) 最大在庫を制約として与え，バックルーム在庫は認めない．

(3) 入庫速度は無限大とする．

このとき，時刻tにおける累積需要量$m(t)$は次式を満足すると仮定する．

$$m'(t) = \lambda\,[Q - m(t)] + \mu \tag{1}$$

同様のモデルが，P.M. Ghare and G.F. Schrader [2]によって提案されているが，彼らのモデルは商品が腐敗する様子を式(1)と同様の微分方程式を用いて表現している．

なお，式(1)は，時刻tにおける需要速度(単位時間当り需要量)が，現在の在庫量に比例する部分(比例定数$\lambda > 0$)と定数(一定の需要量μ)とからなることを意味している．ただし，Qは1回当りの発注量である．

初期条件を$m(0) = 0$として，式(1)の微分方程式を解くと次式を得る．

$$m(t) = (Q + \frac{\mu}{\lambda})(1 - e^{-\lambda t}) \tag{2}$$

よって，時刻tにおける在庫量を$A(t)$とすると

$$A(t) \;=\; Q - m(t) = (Q + \tfrac{\mu}{\lambda})e^{-\lambda t} - \tfrac{\mu}{\lambda} \tag{3}$$

となる．なお，ここではパラメータλとμが既知であるので，リードタイムに関係なく在庫が0になった時点で即座に入庫するよう発注することが可能である．

以下では，単位時間当り期待費用を以下のように導出する．

初めに在庫量が0となるまでに要する時間Tを求める．式(3)において$A(T) = 0$とし，これをTに関して解くと

$$T = -\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\mu}{\lambda Q + \mu} \tag{4}$$

を得る．次に$(0, T]$における延べの在庫量$B(Q)$を求めると

$$B(Q) = \frac{\lambda Q + \mu}{\lambda^2}(1 - e^{-\lambda T}) - \frac{\mu}{\lambda}T \tag{5}$$

となる．よって，単位在庫の単位時間当り在庫維持管理費用をc_1，1回当り発注費用をc_2とすると，単位時間当り総費用は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} C(Q) &= \frac{c_1 B(Q) + c_2}{T} \\ &= c_1\left[\frac{\lambda Q + \mu}{\lambda^2 T}(1 - e^{-\lambda T}) - \frac{\mu}{\lambda}\right] + \frac{c_2}{T} \end{aligned} \tag{6}$$

ここで，$\rho = \lambda/\mu$として，式(4)を用いて式(6)のTを消去すると

$$C(Q) = c_1\left[\frac{Q}{\ln(\rho Q + 1)} - \frac{1}{\rho}\right] + \frac{c_2\lambda}{\ln(\rho Q + 1)} \tag{7}$$

が得られる．

3. 経済的発注量

ここでは，式(7)の期待費用を最小にする発注量を求めることとする．式(7)の$C(Q)$をQに関して微分する

と

$$C'(Q) = c_1 \frac{\ln(\rho Q+1) - \frac{\rho Q}{\rho Q+1}}{[\ln(\rho Q+1)]^2} - c_2 \frac{\frac{\lambda\rho}{\rho Q+1}}{[\ln(\rho Q+1)]^2} \tag{8}$$

となる．よって，$C'(Q) \geq 0$ は

$$(\rho Q+1)\ln(\rho Q+1) - \rho Q \geq \frac{c_2}{c_1}\lambda\rho \tag{9}$$

に等価である．

経済的発注量 Q^* は，バックルーム在庫を許さないという場合の最大在庫量を Q_0 とすると

$$Q^* = \begin{cases} Q & Q \leq Q_0 \\ Q_0 & Q > Q_0 \end{cases} \tag{10}$$

である．

4.　経済的発注量の上下限

4.1　下限

$\ln(1+x)$ に関して次のような不等式が成り立つ．

$$\ln(1+x) < x \tag{11}$$

式 (9) において $\rho Q = x$ とおくと

$$(x+1)\ln(x+1) - x > \frac{c_2}{c_1}\lambda\rho \tag{12}$$

となる．よって，式 (11) より

$$(x+1)\ln(x+1) - x < x(x+1) - x = x^2 \tag{13}$$

が成り立つ．従って

$$(\rho Q)^2 = \frac{c_2}{c_1}\lambda\rho \tag{14}$$

の解を Q_L として

$$Q_L = \sqrt{\frac{c_2\mu}{c_1}} \tag{15}$$

が得られ，$Q^* \geq Q_L$ を満たす．

4.2　上限

$\ln x$ は

$$\ln x = \tfrac{x-1}{x} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{x-1}{x}\right)^2 + \cdots, \quad x > \tfrac{1}{2} \tag{16}$$

を満たす．よって

$$\ln(x+1) = \tfrac{x}{x+1} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{x}{x+1}\right)^2 + \cdots, \quad x > -\tfrac{1}{2} \tag{17}$$

表 1: 数値例 ($\mu = 30$，$c_1 = 1$，$Q_0 = \infty$)

		λ		
c_2		0.001	0.01	0.1
100	Q^*	77.49	77.79	80.73
	Q_L	54.77	54.77	54.77
	Q_U	77.56	78.47	88.10
200	Q^*	109.60	110.20	116.00
	Q_L	77.46	77.46	77.46
	Q_U	109.70	111.60	131.40
300	Q^*	134.30	135.20	143.80
	Q_L	94.87	94.87	94.87
	Q_U	134.50	137.20	167.50

である．式 (17) より

$$(x+1)\ln(x+1) - x > \frac{1}{2}\frac{x^2}{x+1} \tag{18}$$

が成り立つ．よって

$$\frac{1}{2}\frac{(\rho Q)^2}{\rho Q+1} = \frac{c_2}{c_1}\lambda\rho \tag{19}$$

の解を Q_U とすると，Q_U は次式で与えられる．

$$Q_U = \frac{c_2\lambda}{c_1} + \sqrt{(\frac{c_2\lambda}{c_1})^2 + \frac{2c_2\mu}{c_1}} \tag{20}$$

この Q_U は，$Q^* \leq Q_U$ を満たす．よって

$$\sqrt{\frac{c_2\mu}{c_1}} \leq Q^* \leq \frac{c_2\lambda}{c_1} + \sqrt{(\frac{c_2\lambda}{c_1})^2 + \frac{2c_2\mu}{c_1}} \tag{21}$$

が言える．

5.　数値例

以上に述べた経済的発注量，及び，その上下限に対する数値例を示す．表 1は，生鮮食料品を念頭において数値実験を行なった結果である．

参考文献

[1] 児玉正憲，生産・在庫管理システムの基礎，九州大学出版会，1996.

[2] Ghare P.M. and Schrader G.F. , A Model for an Exponentially Decaying Inventory , *J. Ind. Engng* , **14** , (1963) , 238-243.