1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

n立方体と$n-2$部分立方体について

01007584　大阪工業大学　一森哲男　ICHIMORI Tetsuo

1. はじめに

超立方体（ハイパーキューブ）は並列分散処理を行う際のコンピュータ・アーキテクチャにおける有名なプロセッサ間の相互結合方式の一つである．この結合方式は規則性，耐故障性，マルチタスク能力等が高く優れた構造を持っている[2].

超立方体グラフのノードはプロセッサに対応しているが，プロセッサの数が多くなると必然的に故障は避けられなくなる．そこで，超立方体グラフの中で，いくつかのノードが故障したとき，このグラフのなかで故障ノードを含まない部分立方体を見つけだし，超立方体が行っていた処理全体をその部分立方体に引きつがせることが考えられている[1].

一方，ノードの故障は予測できるものではないので，故障ノード数と故障ノードを含まない部分立方体の最大次元の関係を調べることにより，超立方体がどの程度の耐故障性を有するかの研究も行われている[3]．しかしながら，その正確な関係を見つけることは難しく，現時点では近似的なものとなっている．ここでは，手始めとしてn立方体と$n-2$部分立方体の正確な関係を調べてみたので，それを報告する．ただ，ここで用いた手法や得られた結果を一般化することは難しく新たなアイデアが必要である．

2. 問題の定義

n立方体Q_n $(n \geq 1)$ は2点完全グラフK_2を用いて

$$Q_n = Q_{n-1} \times K_2$$

と定義される．Q_0は単一ノードのみからなるグラフである．n立方体Q_nでは，n桁の2進数で表された$(0\cdots0)$から$(1\cdots1)$までの2^n個のアドレスがノードに1対1に対応し，任意の2ノード間にエッジが存在するのは，それらのハミング距離が1の時およびそのときだけである．明らかに，各ノードの次数はnなので，n立方体Q_nは正則グラフであり，そのエッジの総数は$n2^{n-1}$である．このグラフは2部グラフでもある．

n立方体Q_nの部分グラフでQ_k $(k \leq n-1)$に同型な部分グラフをk部分立方体という．k部分立方体は故障ノードを含まなければ**活きている**という．

論文[3]のテーマは，n立方体Q_nのなかに，任意のk部分立方体が活きていないときの故障ノードの最小個数γ_k^nを求めることであった．別な言い方をすれば，どのγ_k^n-1個のノードが故障しても活きたk部分立方体は存在するが，あるγ_k^n個のノードが故障すれば活きたk部分立方体はひとつも存在しない，と言える．明らかに，$\gamma_{n-1}^n = 2$である．例えば，$(0\cdots0)$と$(1\cdots1)$のノードが故障すれば，活きた$n-1$部分立方体は存在しない．

ここでのテーマは非常に限定されたものであるが，γ_{n-2}^nを求めることである．以下，γ_{n-2}^nを単にγと書く．記号$(00*\cdots*)$はアドレスとしてn桁目のビットと$n-1$桁目のビットがどちらも0を持つノード全体から誘導される部分グラフを表す．この部分グラフはQ_{n-2}に同型な$n-2$部分立方体になっている．同様に，$(01*\cdots*)$, $(10*\cdots*)$, $(11*\cdots*)$の$n-2$部分立方体を定義する．するとQ_nはこれら4つの部分立方体を含むこととなる．実際，Q_nのノード全体は4つの部分立方体のノード集合に分割されるので，Q_nはこれらの4つの部分立方体に**分割される**という．ただし，分割の仕方はこれだけではなく，あきらかに${}_nC_2$通り

の異なる分割がある.

いま，4つのノード $(\mathbf{000}\cdots0)$, $(\mathbf{010}\cdots0)$, $(\mathbf{100}\cdots0)$, $(\mathbf{110}\cdots0)$ が故障したとする．このとき，4つの $n-2$ 部分立方体 $(00*\cdots*)$, $(01*\cdots*)$, $(10*\cdots*)$, $(11*\cdots*)$ はどれもすべて故障ノードを含むので活きていない．よって，ここでの問題は次の決定問題に帰着できる.

決定問題 m 行 n 列の 0-1 行列 $H=(h_{ij})$ を考え，任意の異なる2列ベクトルから作られる m 個の2ビット

$$(h_{1i}h_{1j}),\ldots,(h_{mi}h_{mj})$$

が (00), (01), (10), (11) を常に含むように h_{ij} の値を決めることができるか.

行列 H の各行ベクトルは故障ノードのアドレスに対応しておりこの決定問題の答えがイエスとなる最小の m が求めている γ_{n-2} である．さまざまな n に対して最小の m を求めることは，m を先に定めてから，決定問題の答えがイエスとなる最大の n の値 n^* を求めても同じことであるから，以下，後者のかたちで問題を考える.

3. 解法

前節で定めたように，行数 $m\geq4$ を固定する．2^m 個の0-1 列ベクトル全体から決定問題の答えがイエスとなるように最大個数の列ベクトルを選ぶことにする．ただし，列ベクトルに含まれる成分 1 の総数（以下，ベクトルの**重み**と定義する）は 0 から n までであるが明らかに，重みが 0, 1, $n-1$, および n のものではどのような列ベクトルとペアを組んでも (00), (01), (10), (11) の4つすべてを与えることはできないので，それらは対象から外す.

ここで，各列ベクトルが一つの頂点に対応している無向グラフ G を構成する．任意の2頂点間に辺が存在するのは，その2頂点に対応する2個の列ベクトルが作る m 個の2ビットが (00), (01), (10), (11) を含むとき，およびそのときのみとする．すると，我々の問題はこの無向グラフ G の中に含まれる最大の完全部分グラフ（クリーク）を見つけることに帰着される．そのときの位数が n^* である.

つぎに，グラフの頂点全体を対応する列ベクトルの重みで分類する．記号 V_k $(2\leq k\leq\lfloor\frac{m}{2}\rfloor)$ は列ベクトルの重みが丁度 k となる頂点集合を表し，$\bar{V}_k$ $(2\leq k\leq\lfloor\frac{m}{2}\rfloor)$ は列ベクトルの重みが丁度 $n-k$ となる頂点集合を表わす．V_k と $\bar{V}_k$ から誘導される部分グラフを G_k と $\bar{G}_k$ とする．この2つのグラフは同型もしくは同一である.

補題 G_k に含まれるクリークの最大位数は ${}_{m-1}C_{k-1}$ である.

定理 $m=2p$ もしくは $m=2p+1$ のとき $n^*={}_{m-1}C_{p-1}$ である.

系 いくつかの n の値に対して $\gamma=\gamma^n_{n-2}$ を示す.

$$n=3\longrightarrow\gamma=4$$

$$n=4\longrightarrow\gamma=5$$

$$5\leq n\leq10\longrightarrow\gamma=6$$

$$11\leq n\leq15\longrightarrow\gamma=7$$

$$16\leq n\leq35\longrightarrow\gamma=8$$

$$36\leq n\leq56\longrightarrow\gamma=9$$

$$57\leq n\leq126\longrightarrow\gamma=10$$

参考文献

[1] F. Özgüner and C. Aykanat. "A Reconfiguration Algorithm for Fault Tolerance in a Hypercube Multiprocessor." *Information Processing Letters*, Vol. 29. pp. 247 254. 1988.

[2] Y. Saad and M.H. Schultz. "Topological Properties of Hypercubes." *IEEE Trans. Comput.*, Vol. 37. pp. 867-872. 1988.

[3] T. Sasama. H. Masuyama and T. Ichimori. "Maximum Dimensional Fault Free Subcube Allocation in a Faulty Hypercube." 1998.